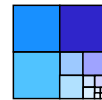

Comment minimiser une tresse?

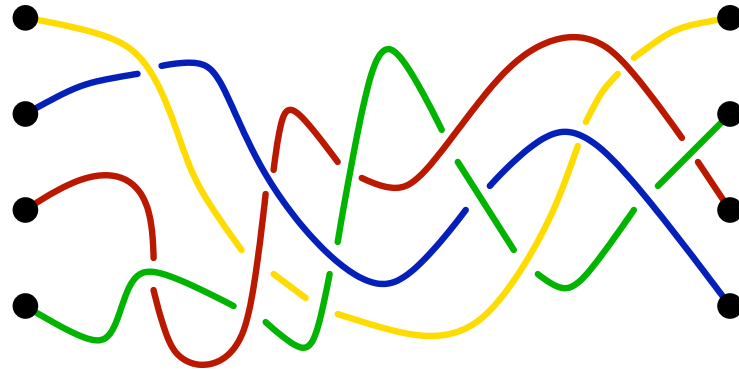
Dominique Poulalhon

travail en commun avec Jean Mairesse et Anne Micheli



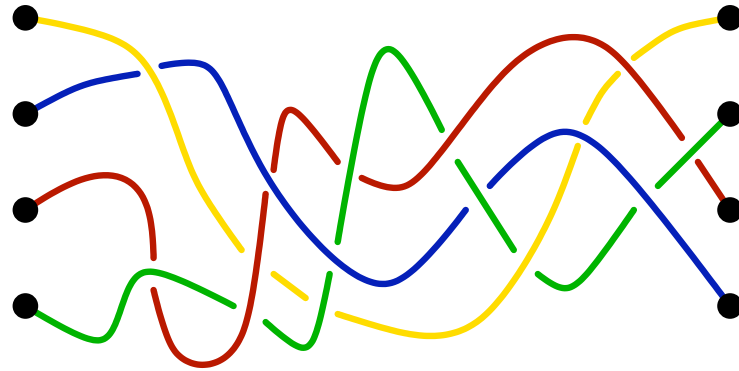
Qu'est-ce qu'une tresse ?

Des fils emmêlés et aux extrémités fixées :

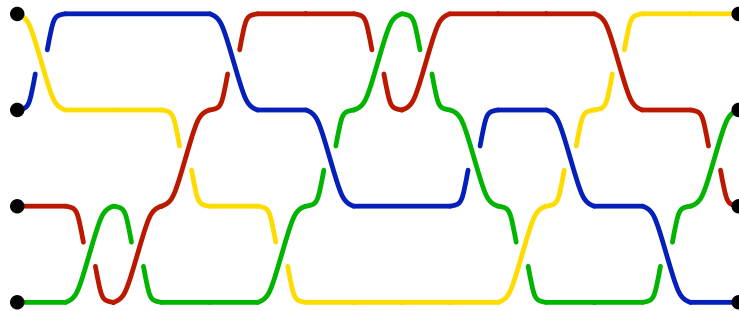


Qu'est-ce qu'une tresse ?

Des fils emmêlés et aux extrémités fixées :

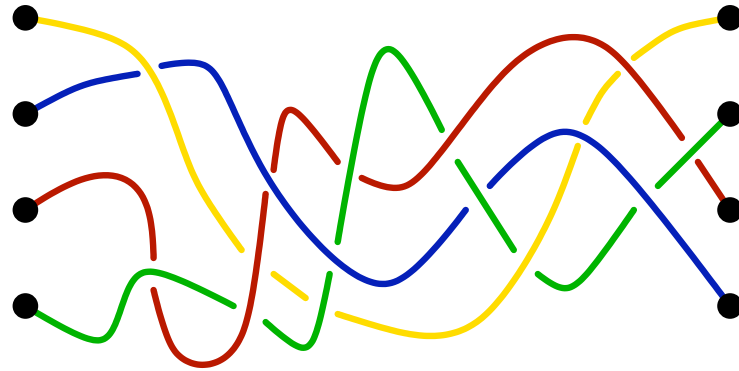


Un diagramme de tresse :

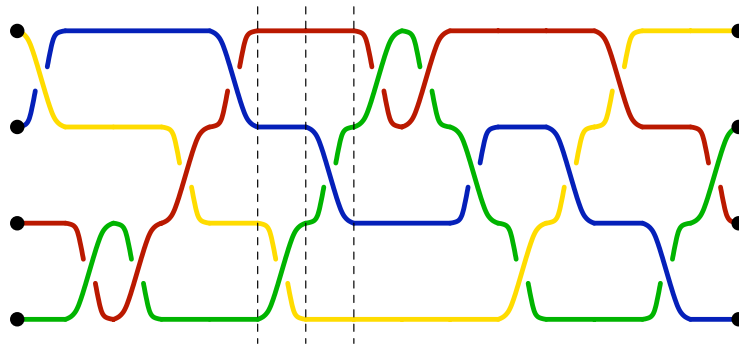


Qu'est-ce qu'une tresse ?

Des fils emmêlés et aux extrémités fixées :

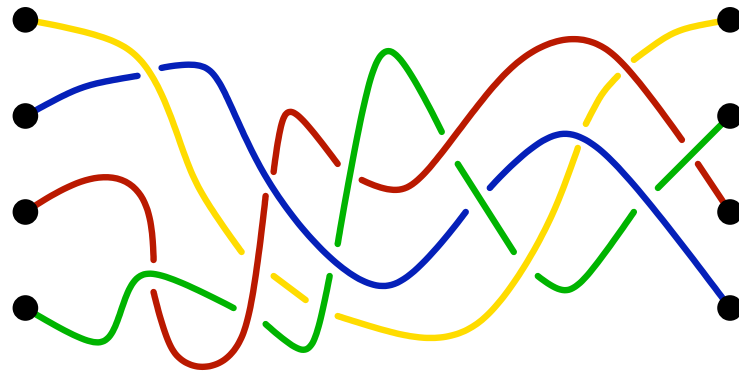


Un diagramme de tresse :

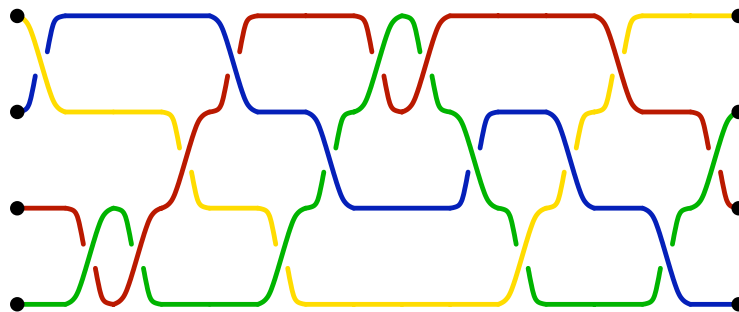


Qu'est-ce qu'une tresse ?

Des fils emmêlés et aux extrémités fixées :



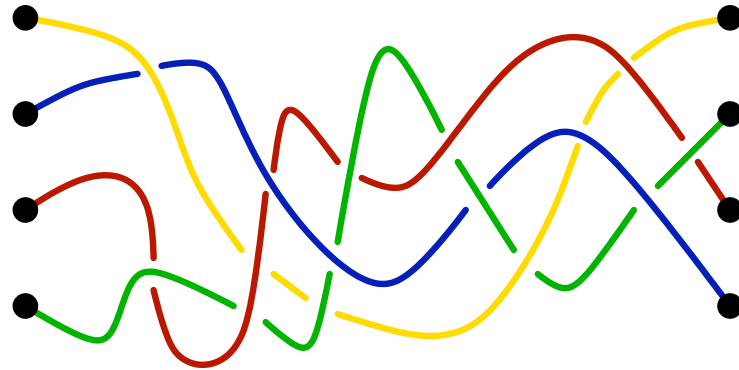
Un diagramme de tresse :



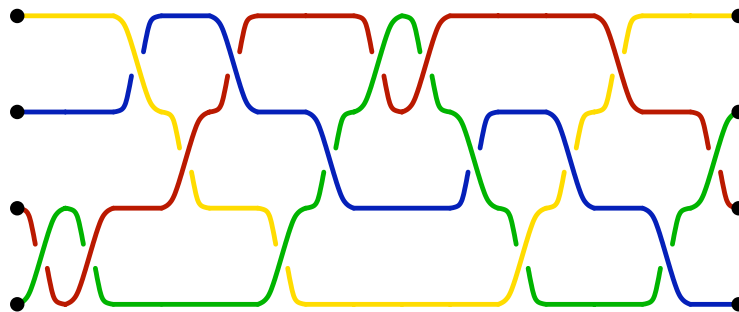
Une tresse = une classe d'isotopie de diagrammes

Qu'est-ce qu'une tresse ?

Des fils emmêlés et aux extrémités fixées :



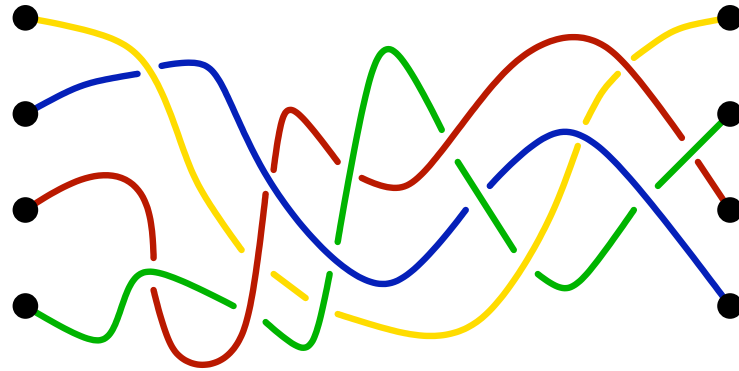
Un diagramme de tresse :



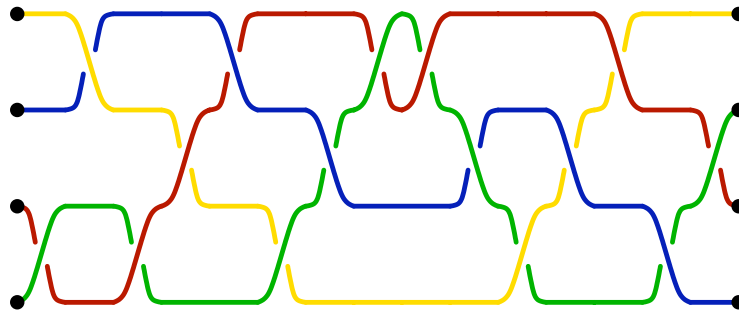
Une tresse = une classe d'isotopie de diagrammes

Qu'est-ce qu'une tresse ?

Des fils emmêlés et aux extrémités fixées :



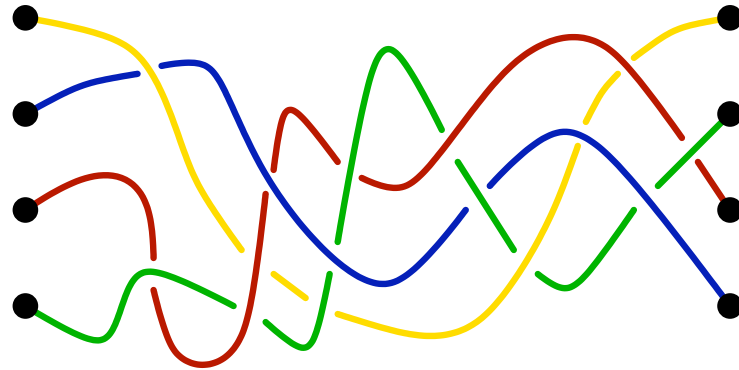
Un diagramme de tresse :



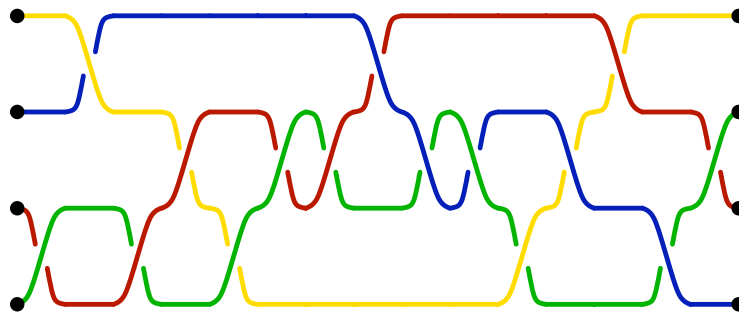
Une tresse = une classe d'isotopie de diagrammes

Qu'est-ce qu'une tresse ?

Des fils emmêlés et aux extrémités fixées :



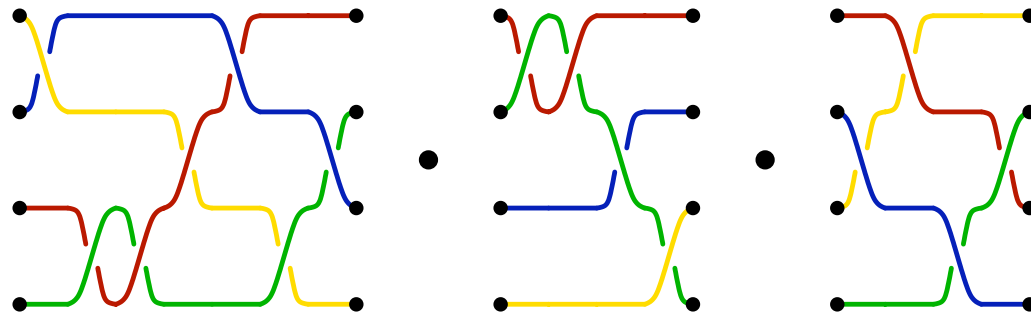
Un diagramme de tresse :



Une tresse = une classe d'isotopie de diagrammes

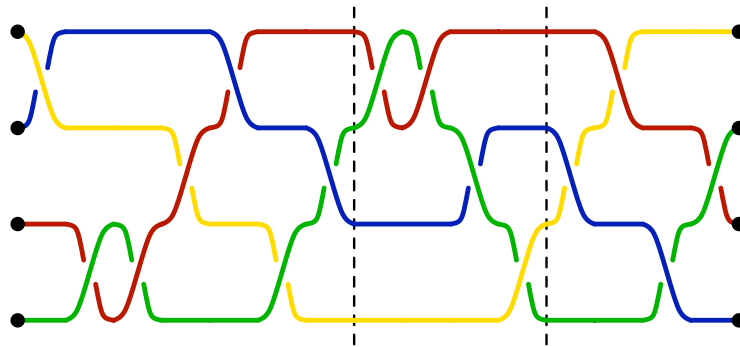
Le groupe B_n

● produit (associatif) : concaténation



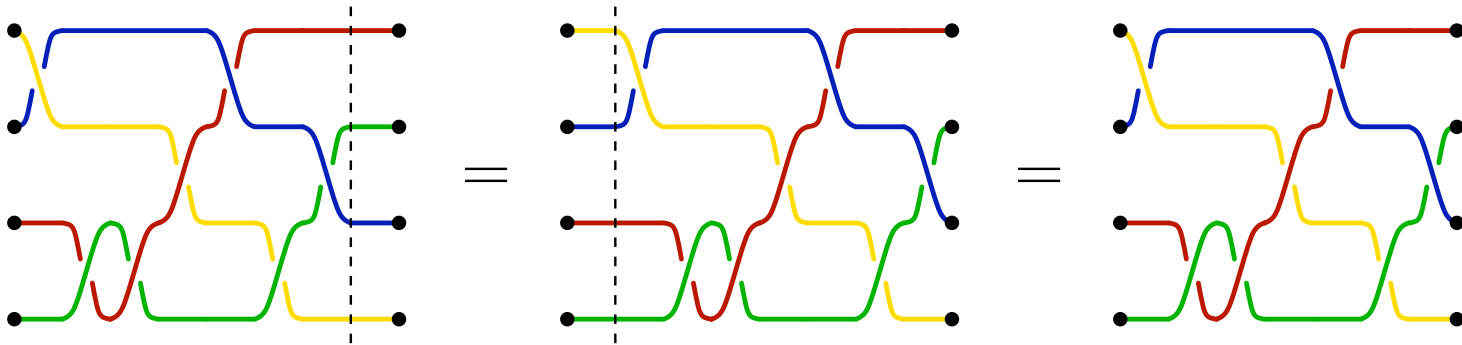
Le groupe B_n

- produit (associatif) : concaténation



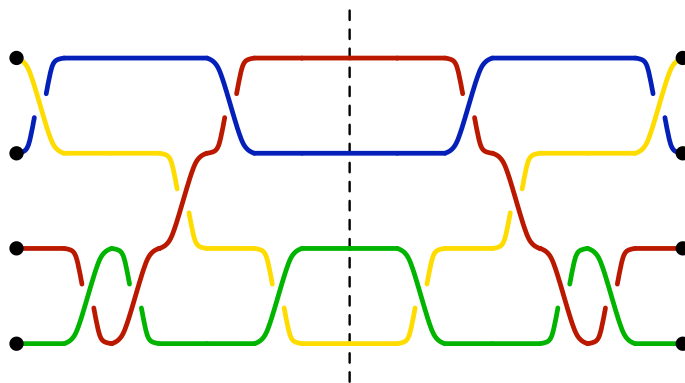
Le groupe B_n

- produit (associatif) : concaténation
- élément neutre



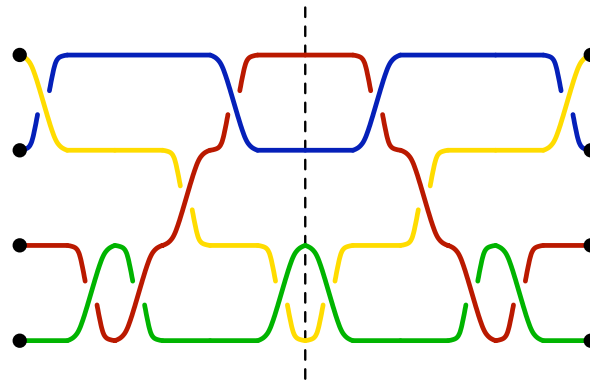
Le groupe B_n

- produit (associatif) : concaténation
- élément neutre
- inverse



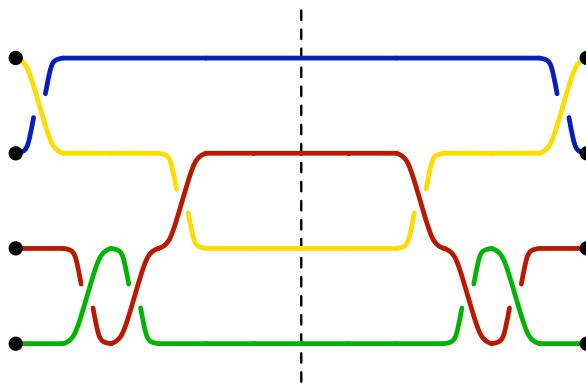
Le groupe B_n

- produit (associatif) : concaténation
- élément neutre
- inverse



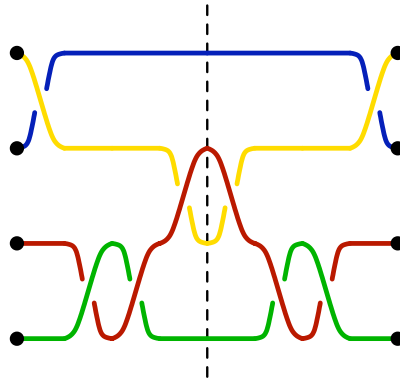
Le groupe B_n

- produit (associatif) : concaténation
- élément neutre
- inverse



Le groupe B_n

- produit (associatif) : concaténation
- élément neutre
- inverse



Le groupe B_n

- produit (associatif) : concaténation
- élément neutre
- inverse



Le groupe B_n

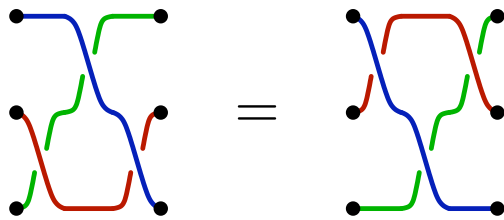
Présentation standard (Artin) du groupe des tresses à n brins :

$$B_n = \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{ll} \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j & \text{si } |i - j| = 1 \\ \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i & \text{si } |i - j| \geq 2. \end{array} \right\rangle$$

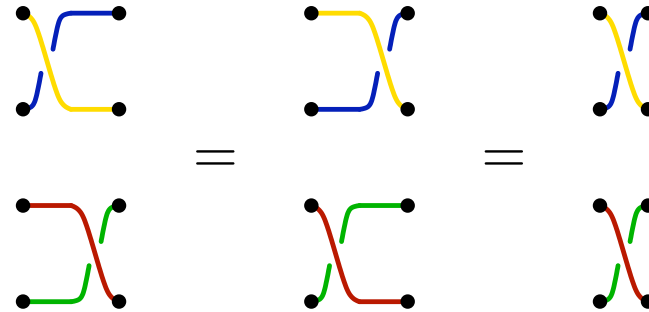
Le groupe B_n

Présentation standard (Artin) du groupe des tresses à 4 brins :

$$B_4 = \langle a, b, c \mid aba = bab, cbc = bcb, ac = ca \rangle$$



$$\begin{aligned} aba &= bab \\ bcb &= cbc \end{aligned}$$

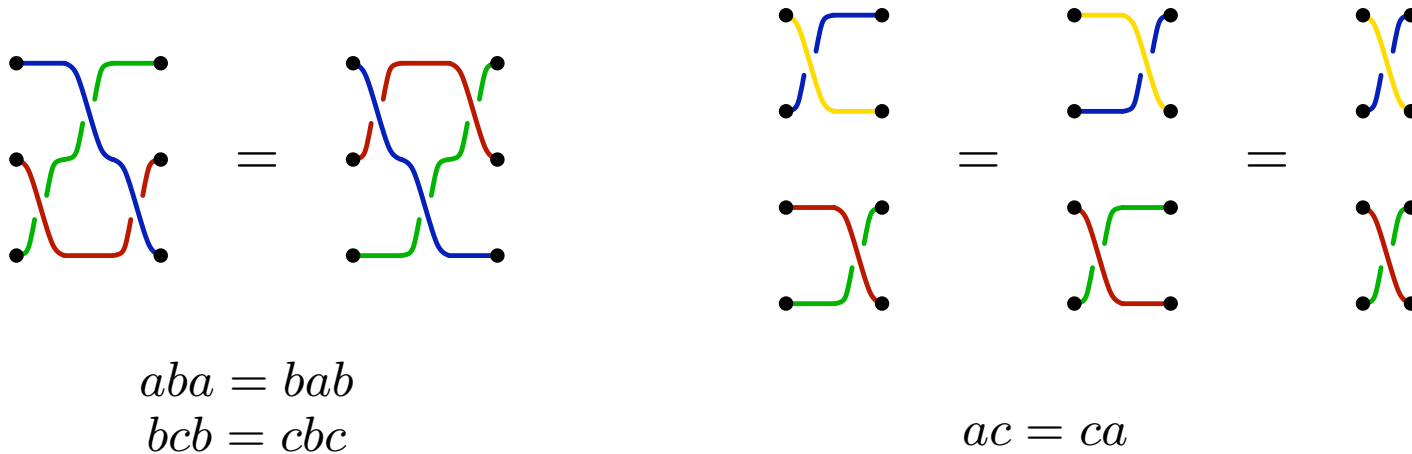


$$ac = ca$$

Le groupe B_n

Présentation standard (Artin) du groupe des tresses à 4 brins :

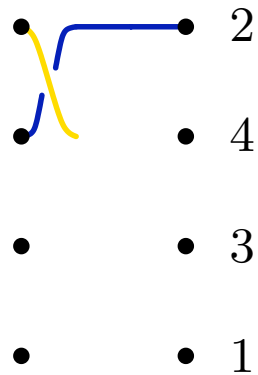
$$B_4 = \langle a, b, c \mid aba = bab, cbc = bcb, ac = ca \rangle$$



Théorème B_n est le groupe des fractions du monoïde B_n^+ des tresses positives.

Tresses simples

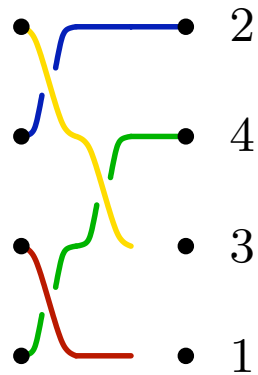
Le groupe symétrique s'injecte naturellement dans B_n^+ :



$$2431 = \sigma_1 \dots$$

Tresses simples

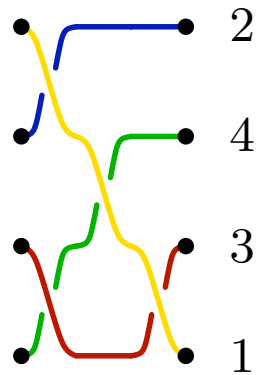
Le groupe symétrique s'injecte naturellement dans B_n^+ :



$$2431 = \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2 \dots$$

Tresses simples

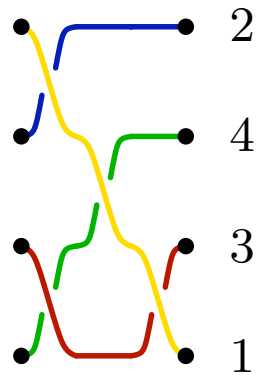
Le groupe symétrique s'injecte naturellement dans B_n^+ :



$$2431 = \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_3$$

Tresses simples

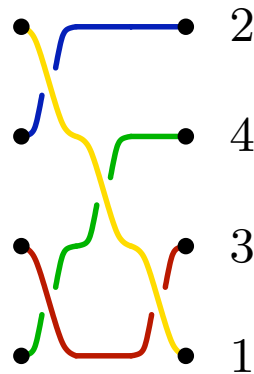
Le groupe symétrique s'injecte naturellement dans B_n^+ :



$$2431 = \sigma_1\sigma_3\sigma_2\sigma_3 = acbc$$

Tresses simples

Le groupe symétrique s'injecte naturellement dans B_n^+ :



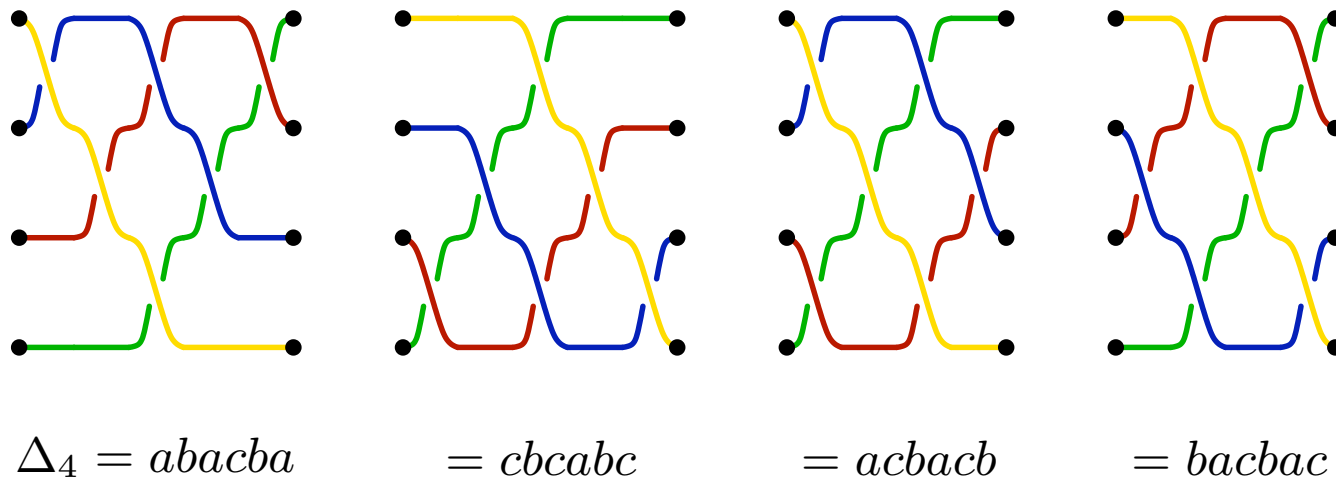
$$2431 = \sigma_1\sigma_3\sigma_2\sigma_3 = acbc$$

On note \mathcal{S} l'ensemble de ces tresses, dites **simples**.

Explication de la terminologie : ce sont exactement les tresses positives dont *toutes* les écritures sur l'alphabet d'Artin sont sans "bégaiement" de lettre.

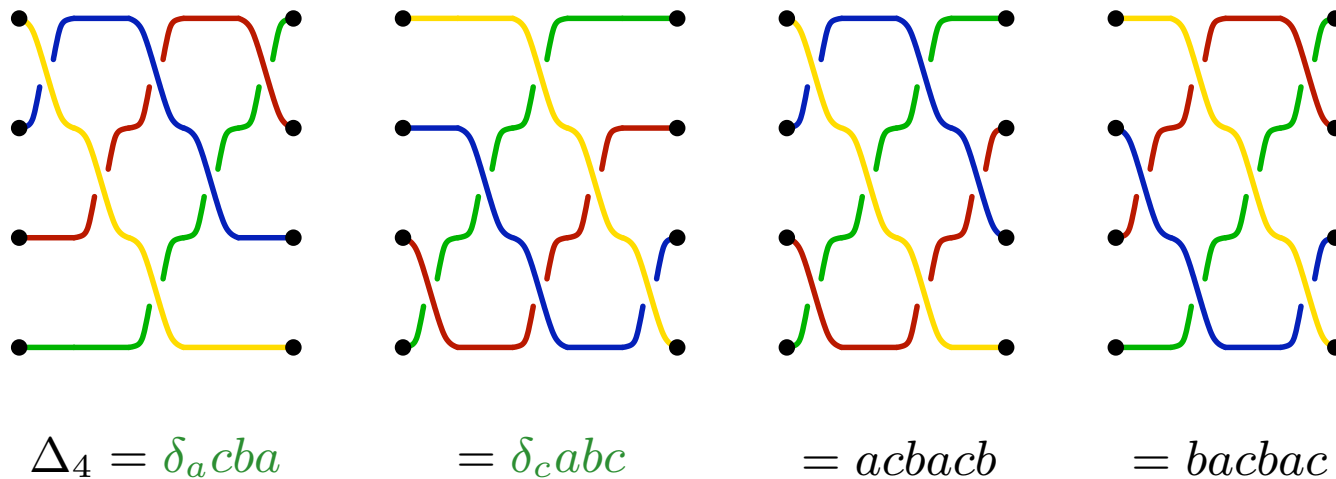
L'élément de Garside Δ_n

Les tresses simples sont exactement les diviseurs (indifféremment à gauche ou à droite) de la tresse Δ_n :



L'élément de Garside Δ_n

Les tresses simples sont exactement les diviseurs (indifféremment à gauche ou à droite) de la tresse Δ_n :

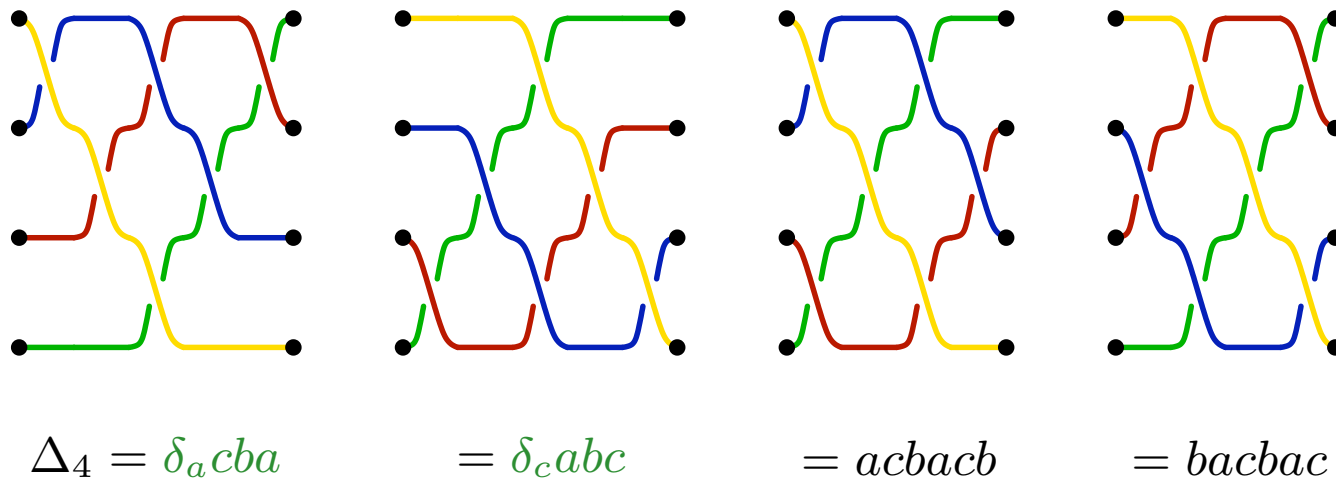


Théorème Δ_n^2 engendre le centre de B_n , et Δ_n "pseudo-commute" avec toutes les tresses :

$$\forall i, \quad \Delta_n \cdot \sigma_i = \sigma_{n-i} \cdot \Delta_n$$

L'élément de Garside Δ_n

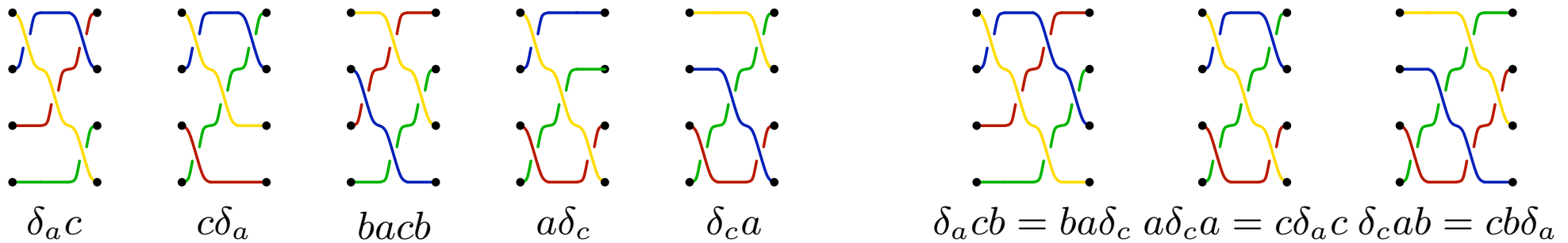
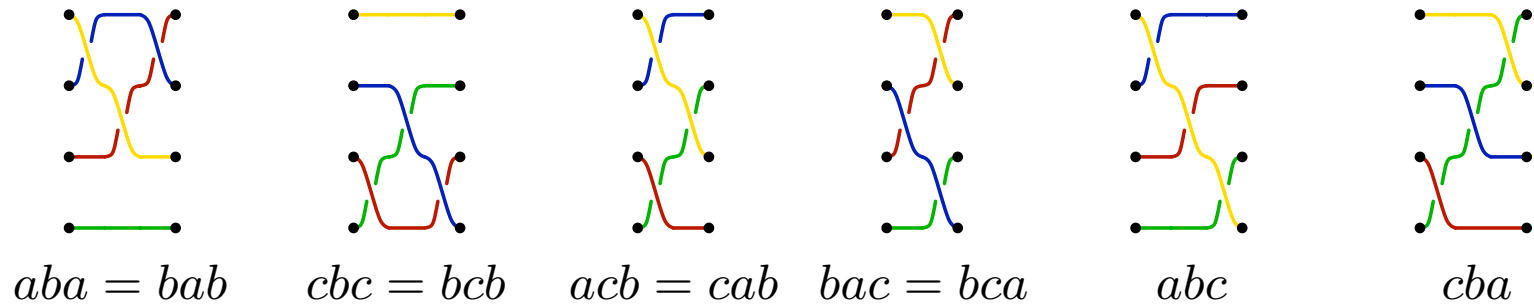
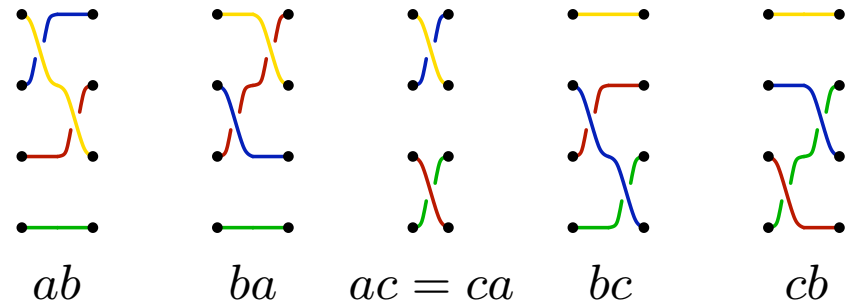
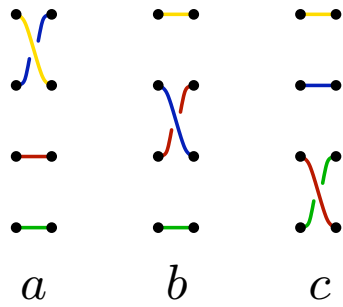
Les tresses simples sont exactement les diviseurs (indifféremment à gauche ou à droite) de la tresse Δ_n :



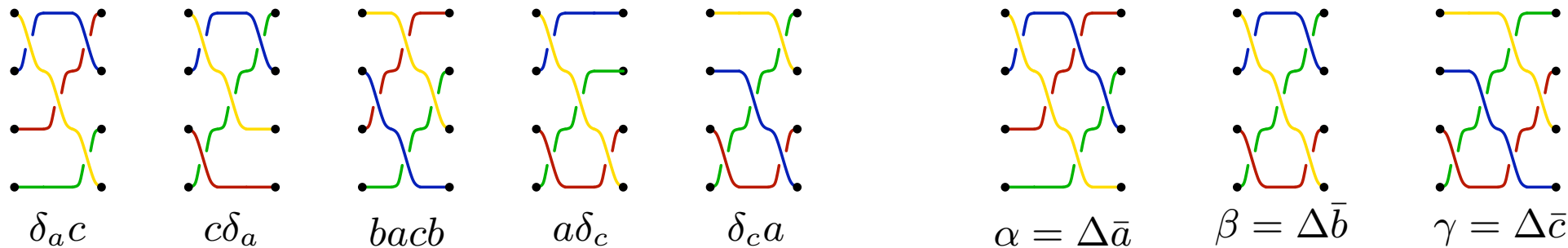
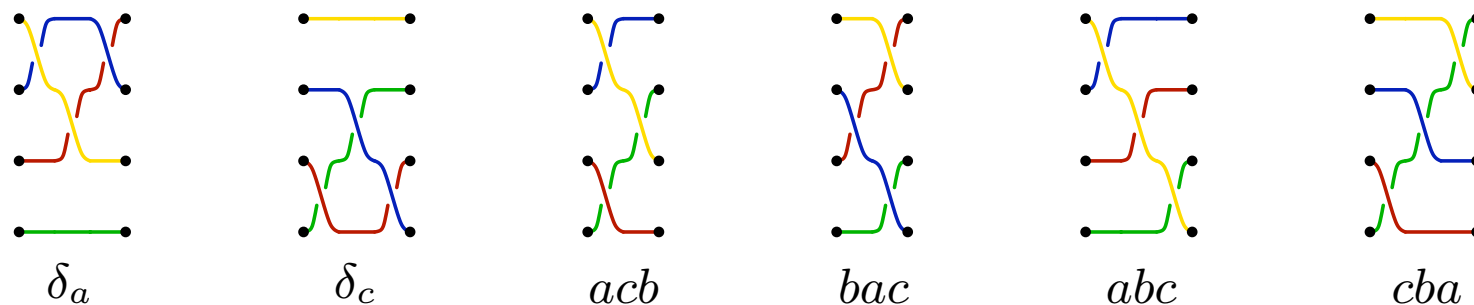
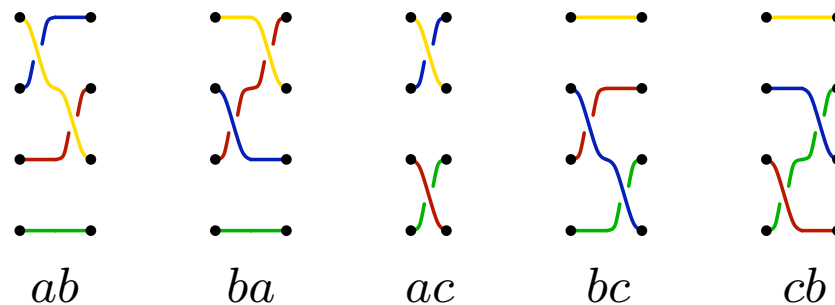
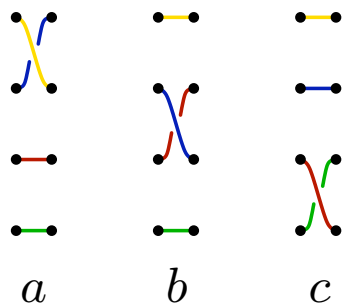
Théorème Δ_n^2 engendre le centre de B_n , et Δ_n "pseudo-commute" avec toutes les tresses :

$$\Delta_4 \cdot a = c \cdot \Delta_4, \quad \Delta_4 \cdot b = b \cdot \Delta_4, \quad \Delta_4 \cdot c = a \cdot \Delta_4$$

Les simples de B_4



Les simples de B_4



Left et Right

Pour toute tresse positive t , on note

- $\mathcal{L}(t)$ (resp. $\mathcal{R}(t)$) l'ensemble des générateurs d'Artin qui divisent t à gauche (resp. à droite).

Left et Right

Pour toute tresse positive t , on note

- $\mathcal{L}(t)$ (resp. $\mathcal{R}(t)$) l'ensemble des générateurs d'Artin qui divisent t à gauche (resp. à droite).

Par exemple, $\mathcal{L}(\alpha) = \mathcal{L}(abacb) = \{a, b\}$, et $\mathcal{R}(\alpha) = \{b, c\}$

Left et Right

Pour toute tresse positive t , on note

- $\mathcal{L}(t)$ (resp. $\mathcal{R}(t)$) l'ensemble des générateurs d'Artin qui divisent t à gauche (resp. à droite).

Par exemple, $\mathcal{L}(\alpha) = \mathcal{L}(abacb) = \{a, b\}$, et $\mathcal{R}(\alpha) = \{b, c\}$

- $\text{Left}(t)$ (resp. $\text{Right}(t)$) le pgcd (à gauche, resp. à droite) de t et Δ_n .

Left et Right

Pour toute tresse positive t , on note

- $\mathcal{L}(t)$ (resp. $\mathcal{R}(t)$) l'ensemble des générateurs d'Artin qui divisent t à gauche (resp. à droite).

Par exemple, $\mathcal{L}(\alpha) = \mathcal{L}(abacb) = \{a, b\}$, et $\mathcal{R}(\alpha) = \{b, c\}$

- $\text{Left}(t)$ (resp. $\text{Right}(t)$) le pgcd (à gauche, resp. à droite) de t et Δ_n .

Par exemple, $\text{Left}(abacb \cdot bb) = \alpha$

Lemme Pour toutes tresses positives t, u ,

- $\text{Left}(tu) = \text{Left}(t \text{Left}(u))$ et $\mathcal{L}(tu) = \mathcal{L}(t \text{Left}(u))$.
- $\text{Right}(tu) = \text{Left}(\text{Right}(t) u)$ et $\mathcal{R}(tu) = \mathcal{R}(\text{Right}(t) u)$.



Forme Normale Gloutonne (ou : de Garside)

Théorème Toute tresse de B_n^+ admet une unique écriture, dite **FNG** de la forme $s_1 \cdot s_2 \cdots s_\ell$ avec $s_i \in \mathcal{S}$ et $s_i = \text{Left}(s_i s_{i+1})$.

Forme Normale Gloutonne (ou : de Garside)

Théorème Toute tresse de B_n^+ admet une unique écriture, dite **FNG** de la forme $s_1 \cdot s_2 \cdots s_\ell$ avec $s_i \in \mathcal{S}$ et $s_i = \text{Left}(s_i s_{i+1})$.

autrement dit, $s_i = \text{Left}(s_i \cdots s_\ell)$.

Forme Normale Gloutonne (ou : de Garside)

Théorème Toute tresse de B_n^+ admet une unique écriture, dite **FNG** de la forme $s_1 \cdot s_2 \cdots s_\ell$ avec $s_i \in \mathcal{S}$ et $s_i = \text{Left}(s_i s_{i+1})$.

autrement dit, $s_i = \text{Left}(s_i \cdots s_\ell)$.

ou encore : $\mathcal{L}(s_{i+1} \cdots s_\ell) = \mathcal{L}(s_{i+1}) \subset \mathcal{R}(s_i)$.

Forme Normale Gloutonne (ou : de Garside)

Théorème Toute tresse de B_n^+ admet une unique écriture, dite **FNG** de la forme $s_1 \cdot s_2 \cdots s_\ell$ avec $s_i \in \mathcal{S}$ et $s_i = \text{Left}(s_i s_{i+1})$.

autrement dit, $s_i = \text{Left}(s_i \cdots s_\ell)$.

ou encore : $\mathcal{L}(s_{i+1} \cdots s_\ell) = \mathcal{L}(s_{i+1}) \subset \mathcal{R}(s_i)$.

Exemples :

• $\delta_a \cdot a \cdot ab \cdot bac \cdot ab$ est une FNG valide

Forme Normale Gloutonne (ou : de Garside)

Théorème Toute tresse de B_n^+ admet une unique écriture, dite **FNG** de la forme $s_1 \cdot s_2 \cdots s_\ell$ avec $s_i \in \mathcal{S}$ et $s_i = \text{Left}(s_i s_{i+1})$.

autrement dit, $s_i = \text{Left}(s_i \cdots s_\ell)$.

ou encore : $\mathcal{L}(s_{i+1} \cdots s_\ell) = \mathcal{L}(s_{i+1}) \subset \mathcal{R}(s_i)$.

Exemples :

- $\delta_a \cdot a \cdot ab \cdot bac \cdot ab$ est une FNG valide
- $\delta_a \cdot \delta_c$ ne l'est pas ; $\text{FNG}(\delta_a \cdot \delta_c) = \text{FNG}(\delta_a c \cdot bc) = \text{FNG}(\delta_a cb \cdot c) = \alpha \cdot c$.

Forme Normale Gloutonne (ou : de Garside)

Théorème Toute tresse de B_n^+ admet une unique écriture, dite **FNG** de la forme $s_1 \cdot s_2 \cdots s_\ell$ avec $s_i \in \mathcal{S}$ et $s_i = \text{Left}(s_i s_{i+1})$.

autrement dit, $s_i = \text{Left}(s_i \cdots s_\ell)$.

ou encore : $\mathcal{L}(s_{i+1} \cdots s_\ell) = \mathcal{L}(s_{i+1}) \subset \mathcal{R}(s_i)$.

Exemples :

- $\delta_a \cdot a \cdot ab \cdot bac \cdot ab$ est une FNG valide
 - $\delta_a \cdot \delta_c$ ne l'est pas ; $\text{FNG}(\delta_a \cdot \delta_c) = \text{FNG}(\delta_a c \cdot bc) = \text{FNG}(\delta_a c b \cdot c) = \alpha \cdot c$.
 - plus généralement, pour tous simples s_1, s_2 ,
 - si $s_1 s_2 \in \mathcal{S}$, $\text{FNG}(s_1 s_2) = s_1 s_2$,
 - sinon, il existe $t_1, t_2 \in \mathcal{S}$ t.q. $\text{FNG}(s_1 s_2) = t_1 \cdot t_2$.
- \implies les FNG valides sont reconnues par automate, et calculables par transducteurs.

Forme Normale Gloutonne (ou : de Garside)

Théorème

- Toute tresse de B_n admet une unique écriture de la forme $\Delta_n^{-k} \cdot s_1 \cdots s_\ell$ avec $s_i \in \mathcal{S}$ et $s_i = \text{Left}(s_i s_{i+1})$.
- Toute tresse de B_n admet une unique écriture de la forme $t_q^{-1} \cdots t_1^{-1} \cdot s_1 \cdots s_p$ avec $s_i, t_j \in \mathcal{S}$, $s_i = \text{Left}(s_i s_{i+1})$, $t_j = \text{Left}(t_j t_{j+1})$ et $\text{pgcd}(s_1, t_1) = \varepsilon$.

Forme Normale Gloutonne (ou : de Garside)

Théorème

- Toute tresse de B_n admet une unique écriture de la forme $\Delta_n^{-k} \cdot s_1 \cdots s_\ell$ avec $s_i \in \mathcal{S}$ et $s_i = \text{Left}(s_i s_{i+1})$.
- Toute tresse de B_n admet une unique écriture de la forme $t_q^{-1} \cdots t_1^{-1} \cdot s_1 \cdots s_p$ avec $s_i, t_j \in \mathcal{S}$, $s_i = \text{Left}(s_i s_{i+1})$, $t_j = \text{Left}(t_j t_{j+1})$ et $\text{pgcd}(s_1, t_1) = \varepsilon$.

La deuxième forme est géodésique *pour les générateurs de Garside*.

Forme Normale Gloutonne (ou : de Garside)

Conséquences :

- la FNG résout le problème du mot dans B_n ,

Forme Normale Gloutonne (ou : de Garside)

Conséquences :

- la FNG résout le problème du mot dans B_n ,
- ce qui donne un algorithme de calcul de la longueur (peu efficace !)

Forme Normale Gloutonne (ou : de Garside)

Conséquences :

- la FNG résout le problème du mot dans B_n ,
- ce qui donne un algorithme de calcul de la longueur (peu efficace !)
- cela permet de calculer la série génératrice, rationnelle, de B_n

Forme Normale Gloutonne (ou : de Garside)

Conséquences :

- la FNG résout le problème du mot dans B_n ,
- ce qui donne un algorithme de calcul de la longueur (peu efficace !)
- cela permet de calculer la série génératrice, rationnelle, de B_n pour la longueur correspondant aux générateurs de Garside.

Exemple :

$$G_4(z) = 1 + \frac{2z(23 - 122z + 108z^2 + 54z^3 + 3z^4 - 108z^5 + 36z^6)}{(1 - z)(1 - 2z)^2(1 - 6z + 3z^2)^2}$$

Forme Normale Gloutonne (ou : de Garside)

Conséquences :

- la FNG résout le problème du mot dans B_n ,
- ce qui donne un algorithme de calcul de la longueur (peu efficace !)
- cela permet de calculer la série génératrice, rationnelle, de B_n pour la longueur correspondant aux générateurs de Garside.

Exemple :

$$G_4(z) = 1 + \frac{2z(23 - 122z + 108z^2 + 54z^3 + 3z^4 - 108z^5 + 36z^6)}{(1 - z)(1 - 2z)^2(1 - 6z + 3z^2)^2}$$

- elle permet aussi de calculer la série génératrice de B_n^+ pour les générateurs d'Artin.

Exemple :

$$A_4^+(z) = \frac{1}{1 - 3z + z^2 + 2z^3 - z^6}$$

Cas de B_3

Lemme Un mot de tresse de B_3 est géodésique si et seulement si la somme des longueurs du plus long facteur positif simple et du plus long facteur négatif simple est au plus 3.



Cas de B_3

Lemme Un mot de tresse de B_3 est géodésique si et seulement si la somme des longueurs du plus long facteur positif simple et du plus long facteur négatif simple est au plus 3.

- un facteur aba ou bab n'est possible que pour une tresse positive
- il n'y a pas simultanément de facteur ab ou ba et $\bar{a}\bar{b}$ ou $\bar{b}\bar{a}$

Cas de B_3

Lemme Un mot de tresse de B_3 est géodésique si et seulement si la somme des longueurs du plus long facteur positif simple et du plus long facteur négatif simple est au plus 3.

- un facteur aba ou bab n'est possible que pour une tresse positive
- il n'y a pas simultanément de facteur ab ou ba et $\bar{a}\bar{b}$ ou $\bar{b}\bar{a}$

Corollaire on peut calculer une géodésique pour une tresse de B_3 à partir de sa FNG.

Cas de B_3

Lemme Un mot de tresse de B_3 est géodésique si et seulement si la somme des longueurs du plus long facteur positif simple et du plus long facteur négatif simple est au plus 3.

- un facteur aba ou bab n'est possible que pour une tresse positive
- il n'y a pas simultanément de facteur ab ou ba et $\bar{a}\bar{b}$ ou $\bar{b}\bar{a}$

Corollaire on peut calculer une géodésique pour une tresse de B_3 à partir de sa FNG.

Exemple :

$$\Delta^{-1} \cdot a \cdot ab \cdot b \cdot b \cdot ba \cdot a = b \cdot \bar{a} \cdot b \cdot b \cdot ba \cdot a$$

Cas de B_3

Lemme Un mot de tresse de B_3 est géodésique si et seulement si la somme des longueurs du plus long facteur positif simple et du plus long facteur négatif simple est au plus 3.

- un facteur aba ou bab n'est possible que pour une tresse positive
- il n'y a pas simultanément de facteur ab ou ba et $\bar{a}\bar{b}$ ou $\bar{b}\bar{a}$

Corollaire on peut calculer une géodésique pour une tresse de B_3 à partir de sa FNG.

Exemple :

$$\Delta^{-2} \cdot a \cdot ab \cdot b \cdot b \cdot ba \cdot a = a \cdot \bar{b} \cdot a \cdot a \cdot \bar{b} \cdot a$$

Cas de B_3

Lemme Un mot de tresse de B_3 est géodésique si et seulement si la somme des longueurs du plus long facteur positif simple et du plus long facteur négatif simple est au plus 3.

- un facteur aba ou bab n'est possible que pour une tresse positive
- il n'y a pas simultanément de facteur ab ou ba et $\bar{a}\bar{b}$ ou $\bar{b}\bar{a}$

Corollaire on peut calculer une géodésique pour une tresse de B_3 à partir de sa FNG.

Exemple :

$$\Delta^{-3} \cdot a \cdot ab \cdot b \cdot b \cdot ba \cdot a = \bar{a}\bar{b} \cdot \bar{b} \cdot a \cdot a \cdot \bar{b} \cdot a$$

Cas de B_3

Lemme Un mot de tresse de B_3 est géodésique si et seulement si la somme des longueurs du plus long facteur positif simple et du plus long facteur négatif simple est au plus 3.

- un facteur aba ou bab n'est possible que pour une tresse positive
- il n'y a pas simultanément de facteur ab ou ba et $\bar{a}\bar{b}$ ou $\bar{b}\bar{a}$

Corollaire on peut calculer une géodésique pour une tresse de B_3 à partir de sa FNG.

Exemple :

$$\Delta^{-3} \cdot a \cdot ab \cdot b \cdot b \cdot ba \cdot a = \bar{a}\bar{b} \cdot \bar{b} \cdot a \cdot a \cdot \bar{b} \cdot a$$

Théorème La série génératrice de B_3 pour les générateurs d'Artin est :

$$A_3(z) = \frac{1 - z^3 - 2z^4}{(1 - 3z + z^2 + 2z^3)(1 - z)}.$$



Translatées d'une tresse – Tresse canonique

Malheureusement, cela ne marche plus pour $n > 4$...

Exemple : $\Delta^{-1} \cdot b\alpha cb = b\bar{a}cb$, qui est de longueur 4.



Translatées d'une tresse – Tresse canonique

Malheureusement, cela ne marche plus pour $n > 4$...

Exemple : $\Delta^{-1} \cdot b\alpha cb = b\bar{a}cb$, qui est de longueur 4.

Pourtant, $\text{FNG}(b\alpha cb) = \delta_a c \cdot a\delta_c$



Translatées d'une tresse – Tresse canonique

Malheureusement, cela ne marche plus pour $n > 4$...

Exemple : $\Delta^{-1} \cdot b\alpha cb = b\bar{a}cb$, qui est de longueur 4.

Pourtant, $\text{FNG}(b\alpha cb) = \delta_a c \cdot a\delta_c$

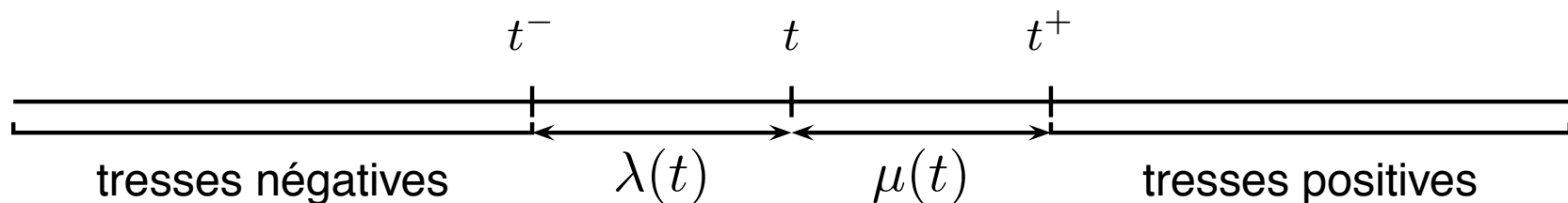
Moralité : on va garder l'idée des divisions successives par Δ , mais pas sur la FNG.

Translatées d'une tresse $t : \{\Delta^k \cdot t \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Elles ont toutes "la même" FNG, à une puissance de Δ près :

$$\Delta^k \cdot s_1 \cdots s_\ell, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad s_i \in \mathcal{S} \setminus \{\Delta\}$$

Éléments particuliers : t^+ , **tresse canonique**, t.q. $k = 0$, et t^- , t.q. $k = \ell$

On définit aussi $\lambda(t)$ et $\mu(t)$ t.q. $t = \Delta^{\lambda(t)} \cdot t^-$ et $t^+ = \Delta^{\mu(t)} \cdot t$.



Effet d'une division par Δ

Soit t une tresse canonique, non vide.

$$\ell(t) - 5 \leq \ell_+(\bar{\Delta} \cdot t) \leq \ell(t) - 1$$

Effet d'une division par Δ

Soit t une tresse canonique, non vide.

$$\ell(t) - 5 \leq \ell_+(\bar{\Delta} \cdot t) \leq \ell(t) - 1$$

Cas extrêmes :

- si $\ell_+(\bar{\Delta} \cdot t) = \ell(t) - 1$, alors $t = x^\ell$ pour un $x \in \{a, b, c\}$;
- si $\ell_+(\bar{\Delta} \cdot t) = \ell(t) - 2$, alors soit $t = a^p c^q$, soit t est en fait une tresse de B_3 ;

Effet d'une division par Δ

Soit t une tresse canonique, non vide.

$$\ell(t) - 5 \leq \ell_+(\bar{\Delta} \cdot t) \leq \ell(t) - 1$$

Cas extrêmes :

- si $\ell_+(\bar{\Delta} \cdot t) = \ell(t) - 1$, alors $t = x^\ell$ pour un $x \in \{a, b, c\}$;
- si $\ell_+(\bar{\Delta} \cdot t) = \ell(t) - 2$, alors soit $t = a^p c^q$, soit t est en fait une tresse de B_3 ;
- si $\ell_+(\bar{\Delta} \cdot t) = \ell(t) - 5$, $\bar{\Delta} \cdot t = u \cdot \bar{x} \cdot v$, donc t peut s'écrire $\tilde{u} \cdot \Delta \bar{x} \cdot v$
donc t a une écriture faisant apparaître un élément de $\{\alpha, \beta, \gamma\}$

Effet d'une division par Δ

Soit t une tresse canonique, non vide.

$$\ell(t) - 5 \leq \ell_+(\bar{\Delta} \cdot t) \leq \ell(t) - 1$$

Cas extrêmes :

- si $\ell_+(\bar{\Delta} \cdot t) = \ell(t) - 1$, alors $t = x^\ell$ pour un $x \in \{a, b, c\}$;
- si $\ell_+(\bar{\Delta} \cdot t) = \ell(t) - 2$, alors soit $t = a^p c^q$, soit t est en fait une tresse de B_3 ;
- si $\ell_+(\bar{\Delta} \cdot t) = \ell(t) - 5$, $\bar{\Delta} \cdot t = u \cdot \bar{x} \cdot v$, donc t peut s'écrire $\tilde{u} \cdot \Delta \bar{x} \cdot v$
donc t a une écriture faisant apparaître un élément de $\{\alpha, \beta, \gamma\}$

Remarque : même raisonnement si k divisions successives diminuent chacune ℓ_+ de 5 : t possède une écriture faisant apparaître explicitement k occurrences de $\{\alpha, \beta, \gamma\}$.

Effet d'une division par Δ

Soit t une tresse canonique, non vide.

$$\ell(t) - 5 \leq \ell_+(\bar{\Delta} \cdot t) \leq \ell(t) - 1$$

Cas extrêmes :

- si $\ell_+(\bar{\Delta} \cdot t) = \ell(t) - 1$, alors $t = x^\ell$ pour un $x \in \{a, b, c\}$;
- si $\ell_+(\bar{\Delta} \cdot t) = \ell(t) - 2$, alors soit $t = a^p c^q$, soit t est en fait une tresse de B_3 ;
- si $\ell_+(\bar{\Delta} \cdot t) = \ell(t) - 5$, $\bar{\Delta} \cdot t = u \cdot \bar{x} \cdot v$, donc t peut s'écrire $\tilde{u} \cdot \Delta \bar{x} \cdot v$
donc t a une écriture faisant apparaître un élément de $\{\alpha, \beta, \gamma\}$

Remarque : même raisonnement si k divisions successives diminuent chacune ℓ_+ de 5 : t possède une écriture faisant apparaître explicitement k occurrences de $\{\alpha, \beta, \gamma\}$.

Et les autres ?



Description des simplifiables

Lemme Soit t canonique.

- si $\ell_+(\bar{\Delta} \cdot t) = \ell(t) - 5$, t peut se réécrire usv avec $s \in \mathcal{S}_5 = \{\alpha, \beta, \gamma\}$;

Description des simplifiables

Lemme Soit t canonique.

- si $\ell_+(\bar{\Delta} \cdot t) = \ell(t) - 5$, t peut se réécrire usv avec $s \in \mathcal{S}_5 = \{\alpha, \beta, \gamma\}$;
- si $\ell_+(\bar{\Delta} \cdot t) = \ell(t) - 4$, t peut se réécrire usv avec $s \in \mathcal{S}_4 = \{\delta_a c, \delta_c a, a \delta_c, c \delta_a\} \cup (ba(a^* + c^*)cb)$;

Description des simplifiables

Lemme Soit t canonique.

- si $\ell_+(\bar{\Delta} \cdot t) = \ell(t) - 5$, t peut se réécrire usv avec $s \in \mathcal{S}_5 = \{\alpha, \beta, \gamma\}$;
- si $\ell_+(\bar{\Delta} \cdot t) = \ell(t) - 4$, t peut se réécrire usv avec $s \in \mathcal{S}_4 = \{\delta_a c, \delta_c a, a \delta_c, c \delta_a\} \cup (ba(a^* + c^*)cb)$;
- si $\ell_+(\bar{\Delta} \cdot t) = \ell(t) - 3$, t peut se réécrire usv avec $s \in \mathcal{S}_3 = \{\delta_a, \delta_c, bac, acb\} \cup (ab^+c + cb^+a)$

Description des simplifiables

Lemme Soit t canonique.

- si $\ell_+(\bar{\Delta} \cdot t) = \ell(t) - 5$, t peut se réécrire usv avec $s \in \mathcal{S}_5 = \{\alpha, \beta, \gamma\}$;
- si $\ell_+(\bar{\Delta} \cdot t) = \ell(t) - 4$, t peut se réécrire usv avec $s \in \mathcal{S}_4 = \{\delta_a c, \delta_c a, a \delta_c, c \delta_a\} \cup (ba(a^* + c^*)cb)$;
- si $\ell_+(\bar{\Delta} \cdot t) = \ell(t) - 3$, t peut se réécrire usv avec $s \in \mathcal{S}_3 = \{\delta_a, \delta_c, bac, acb\} \cup (ab^+c + cb^+a)$

\implies ce ne sont pas exactement les simples, mais presque.

Comment les repérer ?



La Forme Normale Alternante

Idée : utiliser le fait que $\Delta = \delta_a \cdot cba$, et que δ_a peut "voyager" sur les facteurs sans c .

Comme pour la FNG, on va définir un diviseur gauche de t maximal appartenant à un sous-ensemble de B_n^+ ; ici : B_{n-1}^+ .

Exemples :

● $b\alpha cb = \delta_a c \cdot \delta_c a = \delta_a ab \cdot cbb$. donc

$$\Delta^{-1} b\alpha cb = \delta_c cb \cdot \Delta^{-1} \cdot cbb = \delta_c cb \cdot \bar{\delta}_c \cdot \bar{a}\bar{b}\bar{c} \cdot cbb = bc\bar{a}b$$

La Forme Normale Alternante

Idée : utiliser le fait que $\Delta = \delta_a \cdot cba$, et que δ_a peut "voyager" sur les facteurs sans c .

Comme pour la FNG, on va définir un diviseur gauche de t maximal appartenant à un sous-ensemble de B_n^+ ; ici : B_{n-1}^+ .

Exemples :

• $\delta_a \cdot ab \cdot bac \cdot a \cdot ab \cdot b = \delta_a abbaaa \cdot cbb$, donc :

$$\Delta^{-1} \delta_a abbaaa \cdot cbb = \delta_c cbbccc \cdot \bar{\delta}_c \cdot \bar{a}\bar{b}\bar{c} \cdot cbb = bccbbb\bar{a}\bar{b}.$$

La Forme Normale Alternante

Idée : utiliser le fait que $\Delta = \delta_a \cdot cba$, et que δ_a peut "voyager" sur les facteurs sans c .

Comme pour la FNG, on va définir un diviseur gauche de t maximal appartenant à un sous-ensemble de B_n^+ ; ici : B_{n-1}^+ .

Exemples :

• $\delta_a \cdot ab \cdot bac \cdot a \cdot ab \cdot b = \delta_a abbaaa \cdot cbb$, donc :

$$\Delta^{-1} \delta_a abbaaa \cdot cbb = \delta_c cbbccc \cdot \bar{\delta}_c \cdot \bar{a}\bar{b}\bar{c} \cdot cbb = bccbbb\bar{a}b.$$

C'est mieux, mais ça ne suffit pas :

$$\Delta^{-1} \cdot \delta_a abba \cdot cccb \cdot aabbaaa \cdot cb$$

La Forme Normale Alternante

Idée : utiliser le fait que $\Delta = \delta_a \cdot cba$, et que δ_a peut "voyager" sur les facteurs sans c .

Comme pour la FNG, on va définir un diviseur gauche de t maximal appartenant à un sous-ensemble de B_n^+ ; ici : B_{n-1}^+ .

Exemples :

● $\delta_a \cdot ab \cdot bac \cdot a \cdot ab \cdot b = \delta_a abbaaa \cdot cbb$, donc :

$$\Delta^{-1} \delta_a abbaaa \cdot cbb = \delta_c cbbccc \cdot \bar{\delta}_c \cdot \bar{a}\bar{b}\bar{c} \cdot cbb = bccbbb\bar{a}\bar{b}.$$

C'est mieux, mais ça ne suffit pas :

$$\delta_c cbbc \cdot \Delta^{-1} \cdot cccb \cdot aabbaaa \cdot cb$$

La Forme Normale Alternante

Idée : utiliser le fait que $\Delta = \delta_a \cdot cba$, et que δ_a peut "voyager" sur les facteurs sans c .

Comme pour la FNG, on va définir un diviseur gauche de t maximal appartenant à un sous-ensemble de B_n^+ ; ici : B_{n-1}^+ .

Exemples :

● $\delta_a \cdot ab \cdot bac \cdot a \cdot ab \cdot b = \delta_a abbaaa \cdot cbb$, donc :

$$\Delta^{-1} \delta_a abbaaa \cdot cbb = \delta_c cbbccc \cdot \bar{\delta}_c \cdot \bar{a}\bar{b}\bar{c} \cdot cbb = bccbbb\bar{a}\bar{b}.$$

C'est mieux, mais ça ne suffit pas :

$$\delta_c cbbc \cdot aaab \cdot \Delta^{-1} \cdot aabbaaa \cdot cb$$

La Forme Normale Alternante

Idée : utiliser le fait que $\Delta = \delta_a \cdot cba$, et que δ_a peut "voyager" sur les facteurs sans c .

Comme pour la FNG, on va définir un diviseur gauche de t maximal appartenant à un sous-ensemble de B_n^+ ; ici : B_{n-1}^+ .

Exemples :

● $\delta_a \cdot ab \cdot bac \cdot a \cdot ab \cdot b = \delta_a abbaaa \cdot cbb$, donc :

$$\Delta^{-1} \delta_a abbaaa \cdot cbb = \delta_c cbbccc \cdot \bar{\delta}_c \cdot \bar{a}\bar{b}\bar{c} \cdot cbb = bccbbb\bar{a}\bar{b}.$$

C'est mieux, mais ça ne suffit pas :

$$\delta_c cbbc \cdot aaab \cdot ccbccc \cdot \Delta^{-1} \cdot cb$$



La Forme Normale Alternante

Idée : utiliser le fait que $\Delta = \delta_a \cdot cba$, et que δ_a peut "voyager" sur les facteurs sans c .

Comme pour la FNG, on va définir un diviseur gauche de t maximal appartenant à un sous-ensemble de B_n^+ ; ici : B_{n-1}^+ .

Exemples :

• $\delta_a \cdot ab \cdot bac \cdot a \cdot ab \cdot b = \delta_a abbaaa \cdot cbb$, donc :

$$\Delta^{-1} \delta_a abbaaa \cdot cbb = \delta_c cbbccc \cdot \bar{\delta}_c \cdot \bar{a}\bar{b}\bar{c} \cdot cbb = bccbbb\bar{a}b.$$

C'est mieux, mais ça ne suffit pas :

$$\Delta^{-1} \cdot \delta_a abba \cdot cccb \cdot aabbaaa \cdot cb$$

La Forme Normale Alternante

Idée : utiliser le fait que $\Delta = \delta_a \cdot cba$, et que δ_a peut "voyager" sur les facteurs sans c .

Comme pour la FNG, on va définir un diviseur gauche de t maximal appartenant à un sous-ensemble de B_n^+ ; ici : B_{n-1}^+ .

Exemples :

• $\delta_a \cdot ab \cdot bac \cdot a \cdot ab \cdot b = \delta_a abbaaa \cdot cbb$, donc :

$$\Delta^{-1} \delta_a abbaaa \cdot cbb = \delta_c cbbccc \cdot \bar{\delta}_c \cdot \bar{a}\bar{b}\bar{c} \cdot cbb = bccbbb\bar{a}b.$$

C'est mieux, mais ça ne suffit pas :

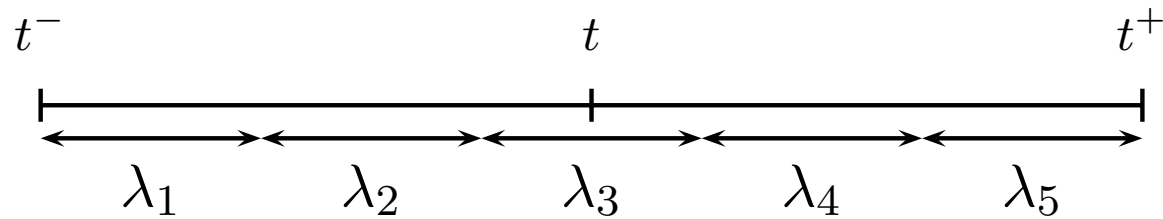
$$\Delta^{-1} \cdot \delta_a abba \cdot cccb \cdot aabbaaa \cdot cb$$

Pourtant, cette tresse peut se réécrire $\Delta^{-1} \cdot \delta_a abb \cdot ccc \cdot \delta_a abbaaa \cdot cb$.



Soyons gloutons

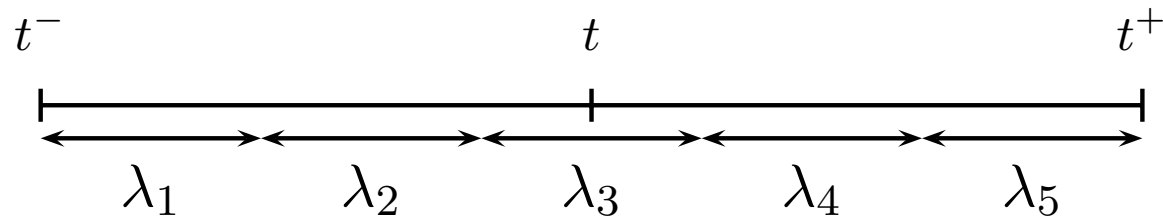
Théorème Soit t une tresse canonique. Alors la suite des décrets de ℓ_+ lors de divisions itérées par Δ est décroissante.



\implies algorithme boustrophédon envisageable

Soyons gloutons

Théorème Soit t une tresse canonique. Alors la suite des décrets de ℓ_+ lors de divisions itérées par Δ est décroissante.

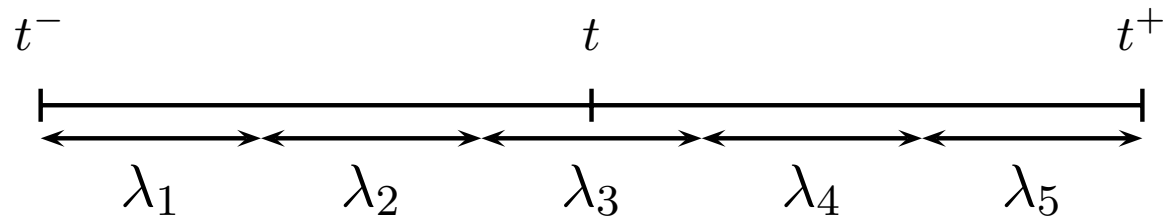


\implies algorithme boustrophédon envisageable

Théorème Soit t canonique dont les p premiers décrets valent k . Alors t se factorise en $t_0 \cdot s_1 \cdot t_1 \cdots s_p \cdot t_p$ avec $t_i \in B_4$ et $s_i \in \mathcal{S}_k$.

Soyons gloutons

Théorème Soit t une tresse canonique. Alors la suite des décrets de ℓ_+ lors de divisions itérées par Δ est décroissante.



\implies algorithme boustrophédon envisageable

Théorème Soit t canonique dont les p premiers décrets valent k . Alors t se factorise en $t_0 \cdot s_1 \cdot t_1 \cdots s_p \cdot t_p$ avec $t_i \in B_4$ et $s_i \in \mathcal{S}_k$.

Théorème Soit t canonique de premier décret k . Alors la recherche itérée du plus court diviseur de t contenant un facteur appartenant à \mathcal{S}_k maximise le nombre de tels facteurs.



Description générale de l'algorithme

Algorithme boustrophédon :

- repérer les facteurs de t^+ appartenant à \mathcal{S}_5
- si $\mu(t) > \lambda_5(t)$, repérer les facteurs de t^- appartenant à $\bar{\mathcal{S}}_5$
- si $\lambda(t) > \lambda_1(t)$, repérer simultanément les facteurs de t^+ appartenant à $\mathcal{S}_5 \cup \mathcal{S}_4$
- si $\mu(t) > \lambda_5(t) + \lambda_4(t)$, repérer les facteurs de t^- appartenant à $\bar{\mathcal{S}}_5 \cup \bar{\mathcal{S}}_4$
- si $\lambda(t) > \lambda_1(t) + \lambda_2(t)$, repérer simultanément les de t^+ appartenant à $\mathcal{S}_5 \cup \mathcal{S}_4 \cup \mathcal{S}_3$

Description générale de l'algorithme

Algorithme boustrophédon :

- repérer les facteurs de t^+ appartenant à \mathcal{S}_5
- si $\mu(t) > \lambda_5(t)$, repérer les facteurs de t^- appartenant à $\bar{\mathcal{S}}_5$
- si $\lambda(t) > \lambda_1(t)$, repérer simultanément les facteurs de t^+ appartenant à $\mathcal{S}_5 \cup \mathcal{S}_4$
- si $\mu(t) > \lambda_5(t) + \lambda_4(t)$, repérer les facteurs de t^- appartenant à $\bar{\mathcal{S}}_5 \cup \bar{\mathcal{S}}_4$
- si $\lambda(t) > \lambda_1(t) + \lambda_2(t)$, repérer simultanément les de t^+ appartenant à $\mathcal{S}_5 \cup \mathcal{S}_4 \cup \mathcal{S}_3$

Remarque : j'ai soigneusement évité de parler des recherches simultanées... C'est ici que notre preuve est encore lacunaire.

Complexité

Version naïve :

- calculs de type FNG : $O(n^2)$
- recherche d'un type de simplifiables : $O(n^2)$
- recherche de 2 types de simplifiables : $O(n^3)$
- recherche de 3 types de simplifiables : $O(n^4)$

En Python, possibilité de traiter en quelques minutes des tresses de longueur 10000.

Version améliorée : on peut factoriser les tresses canoniques en tresses *premières*, telles que *toutes* les réécritures de la tresse s'obtiennent comme produits de réécritures des facteurs.

Or les éléments de $\mathcal{S}_5 \cup \mathcal{S}_4$ ne "chevauchent" pas les séparations entre facteurs premiers.

\implies on descend en $O(n^3)$



Et ensuite ?

- finir la preuve !
- comprendre ce qui ne dépend pas de $n = 4$
- mieux comprendre les géodésiques
- déterminer la nature de la série génératrice