Paramètres combinatoires algébrique/non algébrique approche statistique

Introduction

Paramètres (“*Métriques*”)

Des quantités (Booléen, entiers, réels) calculées sur une classe d’objets à partir des attributs intrinsèque ou extrinsèque

Exemple : un objet arbre A=(V,E)

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & N \\ x & & p(x) \end{array}$$

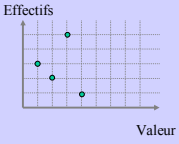
où p est : Nombre de feuilles du sous-arbre, Longueur de cheminement, Type du Noeud

Distribution

Répartition des valeurs du paramètre p dans l'ensemble d'arrivée

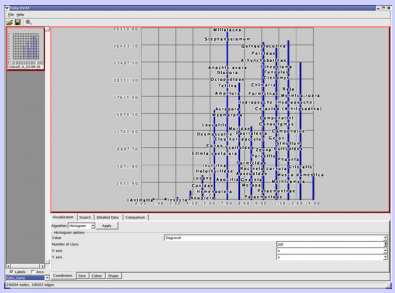
$$V \longrightarrow N$$
$$x \quad \text{card}(p^{-1}(x))$$

Exemple : un objet arbre A=(V,E) et un paramètre entier sur les sommets



$\{p(v), v \in V\}$

Distribution



EVAT : 2nd at INFOVIS'03, LaBRI, Auber&alt

Distribution

Répartition des valeurs du paramètre dans l'ensemble d'arrivée

Observée / Théorique

⇩

Test statistiques

Comparaison

Paramètres → **Distribution**
Distribution → **Statistique**
Statistique → **Action**

Actions
- Masquer
- Dessiner
- Partitionner
- Colorier

Notions très simplifiées de statistiques

Probabilité

Evénements élémentaires

- **Espace fondamental Ω**
- **Opération sur les événements**
  Opérations sur les ensembles
- **Mesure de probabilité** **Pr : Ω → [0..1] tel que**

$$\sum_{\omega \in \Omega} Pr(\omega) = 1$$

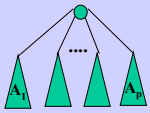
- **A ∩B=∅ ⇒ P(A∪B)=P(A)+P(B)**
- **P(Ω)=1**

Probabilité : Arbres planaires

A un arbre planaire

- **A=r**

- **A=(r,A_1, ..., A_p) où A_i arbre planaire non vide**



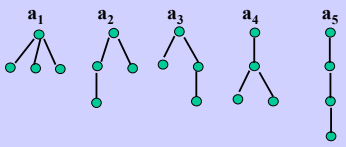
Probabilité : Arbres planaires

- **Evénements élémentaires**
  Un arbre de taille n
- **Espace fondamental Ω**
  Tous les arbres
- **Opération sur les événements**
  L'ensemble des arbres ayant 3 feuilles de taille n

- **Mesure de probabilité** **Pr : Ω → [0..1] tel que**

$$Pr(\omega) = \frac{1}{C_n} \text{ avec } C_n = \frac{1}{2n+1}\binom{2n}{n}$$

Probabilité : Arbres planaires : n=4



Pr_4=1/5

Equiprobabilité :
Tous les événements élémentaires ont la même probabilité

Si A est la réunion de k éléments élémentaires de même probabilité
P(A)=#cas favorables/#cas possibles

P_4(arbre de hauteur 2 de taille 4)=3/5

Probabilité

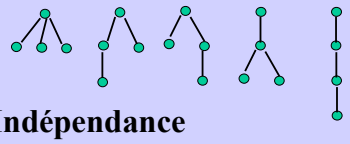
Indépendance

- A et B indépendants : $P(A \cap B)=P(A)P(B)$

Probabilité Conditionnelle

- $P(A/B)=P(A \cap B)/P(B)$

Probabilité : Arbres planaires : n=4



Indépendance

- A et B indépendants : $P(A \cap B)=P(A)P(B)$
  P_4 (2 feuilles et hauteur 2)=3/5
  P_4(2 feuilles)=3/5
  P_4(hauteur 2)=3/5

Probabilité Conditionnelle

- $P(A/B)=P(A \cap B)/P(B)$
  P_4(2 feuilles/hauteur 2)=1

Variables aléatoires discrètes

X : $\Omega \rightarrow \Omega'$ (sous ensemble de R ou N)
$\Omega' = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$

Soit $\omega' \in \Omega'$ $Pr(\omega') = Pr(X^{-1}(\{\omega'\}))$

Moyenne

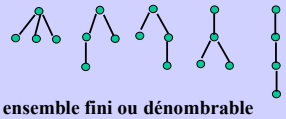
$$E(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i \, Pr(x_i)$$

Variance - Ecart-type

$$V(X) = \sum_{i=1}^{k} (x_i - E(X))^2 \, Pr(x_i)$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Variables aléatoires discrètes : Arbres planaires



X : Ω → ensemble fini ou dénombrable
$\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$
Nombre de feuilles (F), hauteur, …

Moyenne

$$E(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i \, Pr(x_i)$$

E(F)= (1*1+2*3+3*1)/5=2

Variance - Ecart-type

$$V(X) = \sum_{i=1}^{k} (x_i - E(X))^2 \, Pr(x_i)$$

V(F)= ((-1)²*1+0*3+1*1)/5=2/5

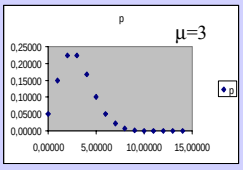
$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Quelques distributions discrètes

Loi de poisson

$$Pr(x) = \frac{\lambda^k}{k!} exp(-\lambda)$$

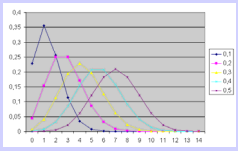
$$E(X) = \lambda, V(X) = \lambda$$



- **Loi binomiale**

$$Pr(x) = \binom{n}{x} p^k q^{n-k} \text{ avec } p + q = 1$$

$$E(X) = np, V(X) = npq$$



Variables aléatoires Continues

X : Ω → R
Fonction de répartition F(x)=Pr(X≤x)
Probabilité d'intervalle P(a<X< b)=F(b)-F(a)
Densité de probabilité f(x)=F'(x)

Moyenne

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, f(x) \, dx$$

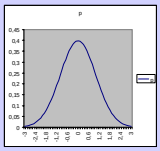
Variance - Ecart-type

$$V(X) = \sigma^2(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu(X))^2 \, f(x) \, dx$$

Quelques distributions continues

- **Loi Normale de paramètre**
  - **la moyenne μ**
  - **l'écart-type σ**

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



Loi centrée réduite
μ=0 et σ=1

Intervalle de confiance

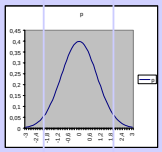
Soit α ∈ [0..1], pour une distribution donnée,
[a..b] tel que Pr(a≤x ≤ b)=1-α

Intervalle de confiance

Soit α ∈ [0..1], pour une distribution donnée,
[a..b] tel que Pr(a≤x ≤ b)=1-α

Exemple

X suit une loi N (3,2)
Y=(X-3)/2 est N (0,1)
α=0.05
Pr(-1,96≤Y ≤ 1,96)=0,95



α=0.05

3-2*1,96 ≤X ≤3+2*1,96

Plusieurs niveaux

- **La variable est défini sur un ensemble d'objet**

  $X : \Omega \rightarrow \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$

  nombre de feuilles d'un arbre

  F : Arbres planaires $\rightarrow N^*$

- **$\omega \in \Omega$, les élements $E_\omega \subset \Omega$**

  nombre de feuilles d'un sous arbre

  F_S : Sommets $\rightarrow N^*$

- **Distribution théorique connue**

  $P(F=k \mid |\omega| = n)$

- **Distribution théorique inconnue**

Distribution théorique/Distribution observée

Distribution théorique

- comparaison un objet /l'ensemble des objets
- comparaison de deux objets
- inconnue $\rightarrow$ estimation
  - Génération aléatoire
  - Beaucoup d'exemples

Distribution observée

- visualisation d'un objet
- partitionnement
- placement (peu exploré)

Une Application

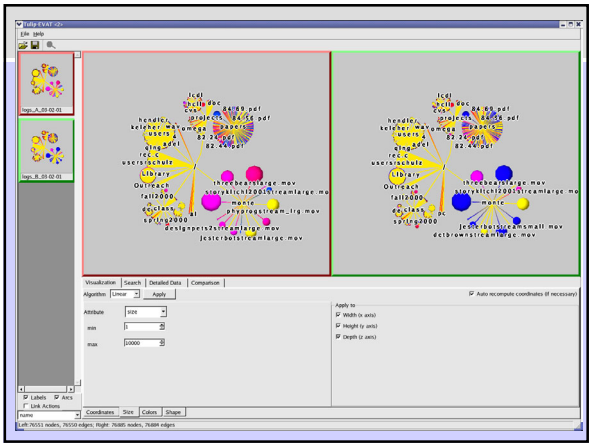
Idée : Utiliser la couleur pour

- Guider l'utilisateur
- Supprimer des détails
- Mettre en évidence

Principe :

Associer à la variable une valeur [0..1]

Associer un élément du dessin à cette valeur



Méthode linéaire

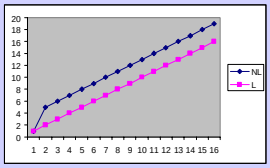
- $X : E \rightarrow [m..M]$

$m=Min\{x_1,x_2,\ldots,x_k,\ldots\}$

$M=Max\{x_1,x_2,\ldots,x_k,\ldots\}$

$C_X : [m..M] \rightarrow [0..1]$

$C_x(y)=(x-m)/(M-m)$

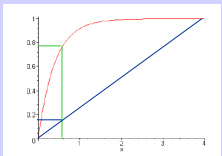


Méthode non linéaire

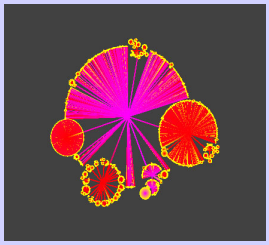
- $X : E \rightarrow R$

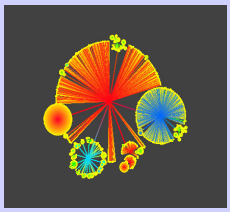
Fonction de répartition

$F(x) : R \rightarrow [0..1]$



Non linéaire / linéaire





Paramètres algébriques

Langage de Fibonacci

- Série énumératrice de

  $X=\{x,a\}$ $F=\{w \in (aa+x)^*, |w| \text{ est pair}\}$

  exemple : w=xaaxaaxaaaax

- Grammaire : $G=<X,\{F_1\},R,F_1\}$

  $F_1 = x F_1 + a a F_1 + 1$

  $F_1 = (aa+x)^*$

  F partie paire de F_1

  $(f,x^{2n})=Fib_{2n+1}$

Langage de Dyck

• Série énumératrice de

$X=\{x,y\}$, $D=\{w \in X^* , |w|_x=|w|_y$ et $w=uv, |w|_x \geq |w|_y\}$

exemple : w=xxyxyxxyyxxy

x xyxyxxyy y xy

• Grammaire : $G=<X,\{D_1\},R,D>$

$D = x\,D\,y\,D + 1$

$\underline{D} = x^2\,\underline{D}^2 + 1$

$(d,x^{2n}) = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

Séries et paramètres

• Substitution

$$S(T) = \sum_{n\geq 0} s_n T^n$$

remplacer une lettre par un objet

• Dérivation

$$S' = \sum_{n\geq 0} n\, s_n x^{n-1}$$

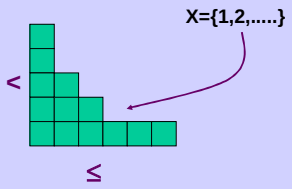
calculer la moyenne

• Intégration

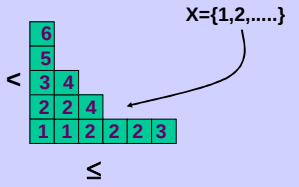
$$\int_0^x S(u)du = \sum_{n\geq 0} s_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

« permutation circulaire » des lettres

Séries et paramètres :Tableaux de Young



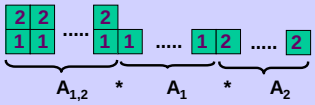
Séries et paramètres :Tableaux de Young



Tableaux de Young sur X={1,2} ?

Séries et paramètres :Tableaux de Young

Tableaux de Young sur X={1,2} ?



$\Phi(1)=x$ et $\Phi(2)=y$

$$F(x,y)=\frac{1}{1-xy} * \frac{1}{1-x} * \frac{1}{1-y}$$

Séries et paramètres :Tableaux de Young

Nombre de tableaux de Young sur X={1,2} ?

$$F(x,y)=\frac{1}{1-xy} * \frac{1}{1-x} * \frac{1}{1-y}$$

$$F(x,y)=\sum_{\substack{i\geq 0\\ j\geq 0}} f_{i,j}\, x^i y^j$$

Nombre de tableaux ayant i entrée 1 j entrée 2

Séries et paramètres :Tableaux de Young

Nombre de tableaux de Young sur X={1,2} ?

$$F(x,y)= \frac{1}{1-xy} * \frac{1}{1-x} * \frac{1}{1-y}$$

$$F(x,y) = \sum_{\substack{i\geq 0 \\ j\geq 0}} f_{i,j} x^i y^j$$

Nombre de tableaux ayant i entrée 1 j entrée 2

$$F(x) = F(x,x) = \sum_{n\geq 0} \sum_{i+j=n} f_{i,j} x^n$$

Nombre de tableaux ayant n entrées

Séries et paramètres :Tableaux de Young

Nombre de tableaux de Young sur X={1,2} ?

$$F(x,y)= \frac{1}{1-xy} * \frac{1}{1-x} * \frac{1}{1-y}$$

$$F(x)= \frac{1}{(1-x^2)(1-x)^2}$$

$$\frac{1}{(1-x)^k} = \sum_{n\geq 0} \binom{n+k-1}{k} x^n$$

$$(F(x),x^n) = \begin{cases} \text{Si } n=2k \text{ alors } k^2+2k+1 \\ \text{Si } n=2k+1 \text{ alors } k^2+3k+2 \end{cases}$$

Séries et paramètres :Tableaux de Young

Nombre moyen de « 1 » dans les tableaux de Young sur X={1,2} ?

$$F(x,y)= \frac{1}{1-xy} * \frac{1}{1-x} * \frac{1}{1-y}$$

$$x\frac{dF(x,y)}{dx} = \sum_{\substack{i\geq 0 \\ j\geq 0}} i\, f_{i,j} x^i y^j$$

$$x\frac{dF(x,y)}{dx}\bigg|_{y=x} = \sum_{n\geq 0} \sum_{i+j=n} i\, f_{i,j} x^n$$

Nombre de 1 dans l'ensemble des tableaux ayant n entrées

Séries et paramètres :Tableaux de Young

Nombre moyen de « 1 » dans les tableaux de Young sur X={1,2} ?

$$F(x,y)= \frac{1}{1-xy} * \frac{1}{1-x} * \frac{1}{1-y}$$

$$x\frac{dF(x,y)}{dx} = \sum_{\substack{i\geq 0\\ j\geq 0}} i\, f_{i,j} x^i y^j$$

$$F_x(x) = \sum_{n\geq 0} \sum_{i+j=n} i\, f_{i,j} x^n$$

Nombre de 1 dans l'ensemble des tableaux ayant n entrées

Séries et paramètres :Tableaux de Young

Nombre moyen de « 1 » dans les tableaux de Young sur X={1,2} ?

$$F(x,y)= \frac{1}{1-xy} * \frac{1}{1-x} * \frac{1}{1-y}$$

$$F_x(x)= \frac{x(2x+1)}{(1-x^2)^2\,(1-x)^2} \qquad \frac{1}{(1-x)^k} = \sum_{n\geq 0} \binom{n+k-1}{n} x^n$$

$(F_x(x),x^n)=$ { Si n=2k alors k^3+2k^2+k ; Si n=2k+1 alors $k^3+7/2k^2+7/2k+1$ }

$$m_1 = \frac{(F_x(x),x^n)}{(F(x),x^n)} = \frac{n}{2}$$

Séries et paramètres : Arbres planaires

Nombre d'arbres planaires de taille n ayant k feuilles

grammaire : $G=<X,\{D_1\},R,D_1\}$

$D_1 = x\, D_1\, y\, D_1 + x\, y\, D_1 + x\, D_1\, y + x\, y$

$\underline{D_1} = x\, \underline{D_1}^2 + x\, z\, \underline{D_1} + x\, \underline{D_1} + x\, z$

$$B_{n,k} = \frac{1}{n-1}\binom{n-1}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

Séries et paramètres : Arbres planaires

Probabilité de tirer un arbres de taille n ayant k feuilles

$$B_{n,k} = \frac{1}{n-1}\binom{n-1}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

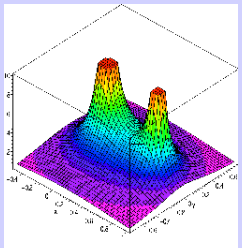
$$P(F=k) = B_{n,k}/C_n$$

- Temps de calcul !!!
- Densité de probabilité
- n est grand, Valeurs asymptotiques

Calculs asymptotiques

Singularité

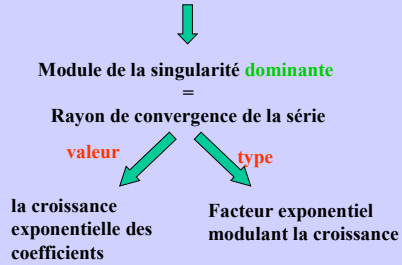
Singularité : point où une fonction cesse d'être analytique



Singularité dominante : plus petit module « plus près de l'origine »

Singularité

Singularité **dominante** : plus petit module
« plus près de l 'origine »



Singularité : valeur : Catalan

Théorème de Pringsheim
Si une fonction a
- **un rayon de convergence fini**
- **des coefficients dans la série de Taylor positifs**

alors
l'une de ses singularités dominante est réelle et positive

$$f(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$$

Singularité : opérations sur les fonctions

Soit f une fonction, on note
Zero(f)={x,f(x)=0}, Sing(f)={x, x singularité de f)

- Sing(f±g) ⊂ Sing(f)∪Sing(g)
- Sing(fxg) ⊂ Sing(f)∪Sing(g)
- Sing(f/g) ⊂ Sing(f)∪Sing(g) ∪Zero(g)
- Sing(f ∘ g) ⊂ Sing(g)∪g^{-1}(Sing(f))
- Sing($f^{1/2}$) ⊂ Sing(f)∪Zero(f)
- Sing(log(f))⊂ Sing(f)∪Sing(g) ∪Zero(g)
- Sing(f^{-1}) ⊂ f(Sing(f)) ∪f(Zero(f ’))

Formule de croissance exponentielle

Soit f une fonction analytique et s sa singularité dominante alors

$$(f,x^n) \approx (1/s)^n$$

Exemple : catalan

$$f(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$$

$s = 1/4 \Rightarrow (f, x^n) \approx 4^n$

Singularité : type

$p \notin \mathbb{N}$, $f(x)=(1-x)^p$ alors

$$(f,x^n) = n^{-p-1}\Gamma(-p) \qquad (p\in\mathbb{N},\ \Gamma(p)=p!)$$

avec

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt$$

Exemple : Dyck

$$f(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$$

$s = 1/4 \Rightarrow (f, x^n) \approx n^{-3/2}\,4^n$

Quelques asymptotiques

$$\begin{array}{lll}
[z^n] & -\sqrt{1-z} & = \frac{2}{n4^n}\binom{2n-2}{n-1} \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi n^3}} \\
[z^n] & \frac{1}{\sqrt{1-z}} & = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \\
[z^n] & \frac{1}{1-z} & = 1 \sim 1 \\
[z^n] & \frac{1}{1-z}\log\frac{1}{1-z} & = H_n \sim \log n \\
[z^n] & \frac{1}{(1-z)^2} & = n+1 \sim n.
\end{array}$$

Plusieurs paramètres

Soit f(x,u) solution d 'une équation polynomiale
f(x,u) =P(f,x,u)
telle que f(x,1) est analytique

• soit u_n la variable aléatoire associée aux puissances de u dans le coefficient de x^n

u_n suit une loi normale pour n assez grand

• On sait calculer moyenne et écart-type (Dmrota)

Plusieurs paramètres : moyenne et écart-type

On suppose que l'on a
f(x,z)=G(f,x,z)
• Calcul de la singularité principale (x_0,f_0)
f=G(f,x,1)
$G_f(f,x,1)=1$

• Calcul de la moyenne
$\mu(z)=n\, G_z(f,x,z)/(x\, G_x(f,x,z))$
avec $x=x_0$ $f=f_0$ $z=1$
• Calcul écart-type
$\sigma^2(z)= [(z\ G_z/x\ G_x)^2 + z\ G_z/x\ G_x + z^2/(x\ G_x^3\ G_{ff})\ (G_x^2\ (G_{ff} G_{zz} - G_{fz}^2) - 2\ G_x G_z\ (G_{ff} G_{xz} - G_{fx} G_{fz}) + G_z^2 (G_{ff} G_{xx} - G_{fx}^2))]\ n$
avec $x=x_0$ $f=f_0$ $z=1$

Plusieurs paramètres : moyenne et écart-type

Nombre d'arbres de taille n ayant k feuilles

Grammaire : G=<X,{D_1},R,D_1}
D_1 = x D_1 y D_1 + x y D_1 + x D_1 y + x y
$\underline{D_1}$= x $\underline{D_1}^2$ + x z $\underline{D_1}$ + x $\underline{D_1}$ + x z

$$B_{n,k} = \frac{1}{n-1}\binom{n-1}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

Plusieurs paramètres : exemple

Quel Effet ?

Isoler des sous arbres trop "petits" ou trop "gros" par rapport à la valeur moyenne d'un paramètre

Sommets $\xrightarrow{L}$ **R**

Comment décider?

Pour un arbre de taille n,
Construire $[\beta_n, \gamma_n]$

si L(s)$\notin$ $[\beta_n, \gamma_n]$ alors l'arbre est trop !

Plusieurs paramètres : exemple

L = Nombre de feuilles

Combien d'arbre de taille n ayant k feuilles ?

$$B_{n,k} = \frac{1}{n-1}\binom{n-1}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

Combien d'arbres de taille n ?

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Probabilité d'avoir un arbre de taille n ayant k feuilles

$$Pr_n(k) = \frac{B_{n,k}}{C_n}$$

Plusieurs paramètres : exemple

L = Nombre de feuilles

Probabilité d'avoir un arbre de taille n ayant k feuilles

$$Pr_n(k) = \frac{B_{n,k}}{C_n}$$

Moyenne et Ecart Type

μ_L = n/2 **σ_L = (n/8)^(1/2)**

Si n>10, L suit une loi de Normale

$$[\beta_n, \gamma_n] = \left[\frac{n}{2} - u_\alpha\sqrt{\frac{n}{8}}, \frac{n}{2} + u_\alpha\sqrt{\frac{n}{8}}\right]$$

Un exemple de Paramètre non algébrique Nombres de Strahler

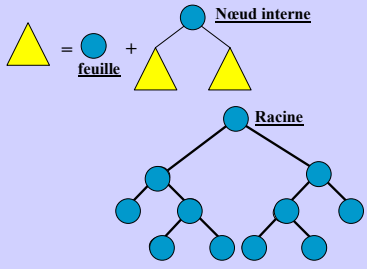
Nombres de Strahler

- Paramètres de classification des bassins fluviaux
  Horton & alt(1947)
- Nombre minimum de registres pour calculer une expression arithmétique
  Ershov (1958)
- Bien connus grace à Knuth (67)
  → Attribute grammars

Nombres de Strahler

Ershov 1958

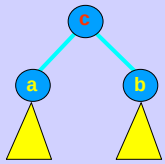
- **Défini sur les arbres binaires**



Nombres de Strahler

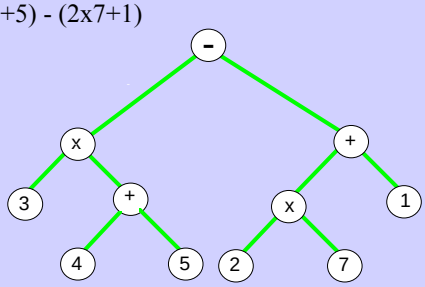
Ershov 1958

- **Défini sur les arbres binaires**
- **Evaluation acendante**
- Si le sommet est une feuille alors 1
  sinon
  si a=b alors c=a+1 sinon c=max(a,b)



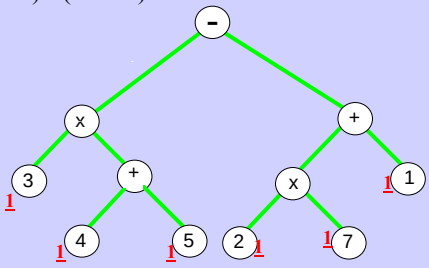
Nombres de Strahler

- 3 x (4+5) - (2x7+1)



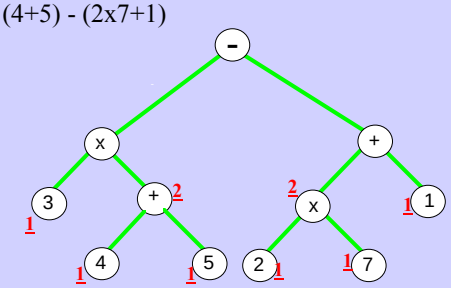
Nombres de Strahler

- 3 x (4+5) - (2x7+1)



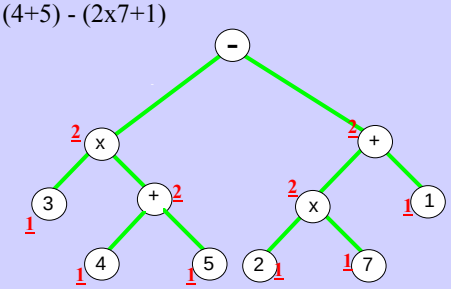
Nombres de Strahler

- 3 x (4+5) - (2x7+1)



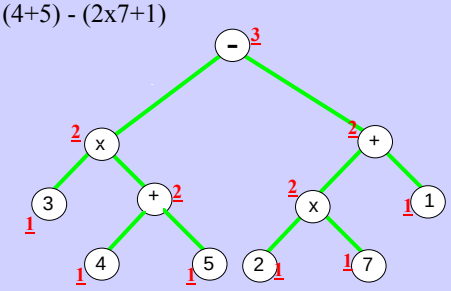
Nombres de Strahler

- 3 x (4+5) - (2x7+1)

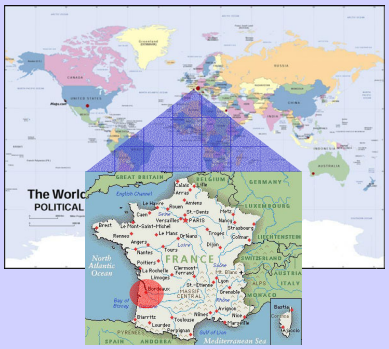


Nombres de Strahler

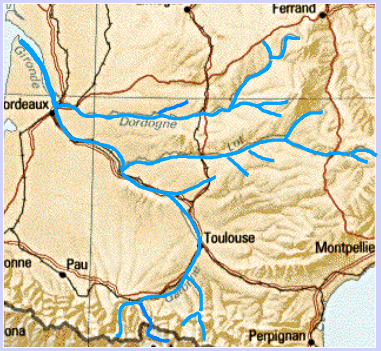
- 3 x (4+5) - (2x7+1)



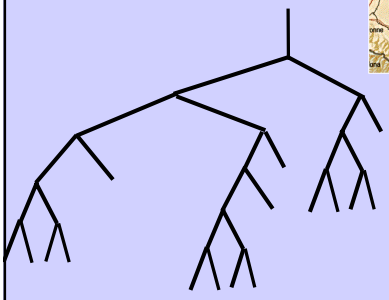
Nombres de Strahler



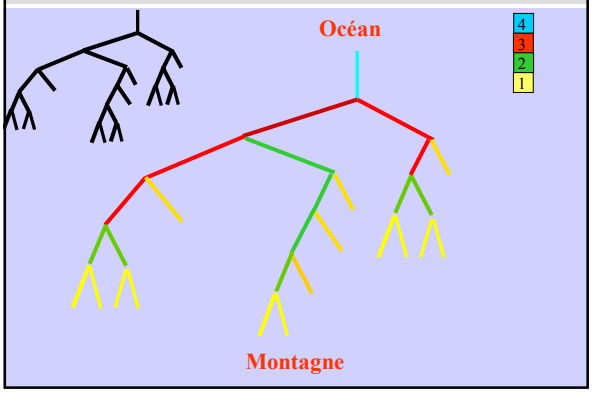
Nombres de Strahler



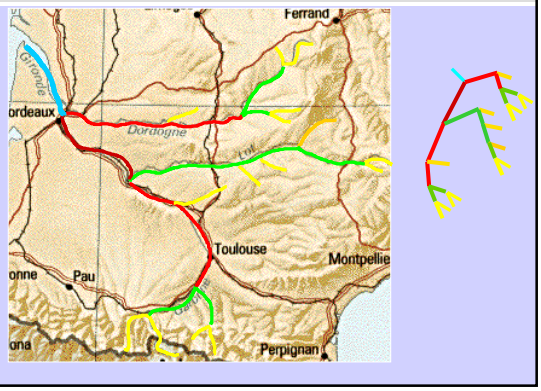
Nombres de Strahler



Nombres de Strahler



Nombres de Strahler



Nombres de Strahler : propriété

- **Asymptotic value of the mean**
- Flajolet and alt (1979)

$S_n = \log_4 n + D(\log_4 n) + O(1)$

Where $D(t) = \Sigma_{k \in Z} a_k e^{i2k\pi t}$

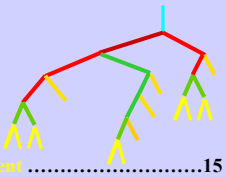
a_k involved

Gamma function

Riemann zeta function

Nombres de Strahler

k-segments



- 1-segment 15
- 2-segment 5
- 3-segment 2
- 4-segment 1

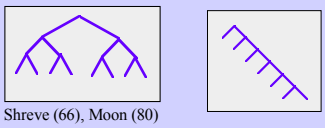
Nombres de Strahler : propriété

Rapport de branchement

- $B_{k,n}$ nombre de k-segments
-

$$\rho_k = \lim_{n \to +\infty} \frac{B_{k,n}}{B_{k+1,n}} \qquad \rho_k \approx 4 - \frac{4^k}{2n} + O(1/n^2)$$

- Arbre parfait Arbre peigne

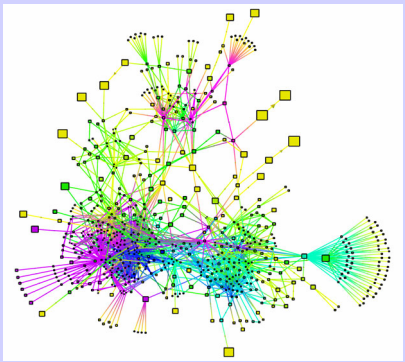


- Shreve (66), Moon (80)
- Pour des rivières réelles entre 3 et 4 (Horton 45)

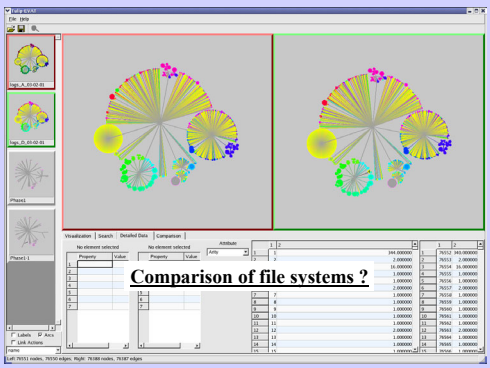
Nombres de Strahler : application

G. Viennot and alt, SIGGRAPH Conference, 1989.

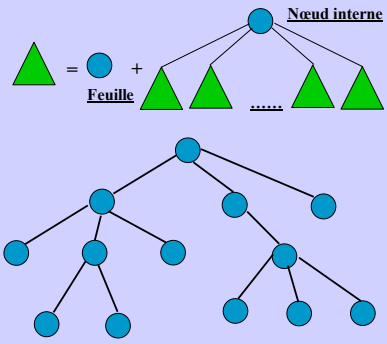
Nombres de Strahler



Nombres de Strahler

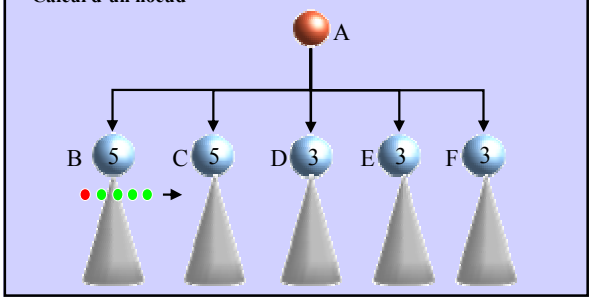


Nombres de Strahler : arbres planaires

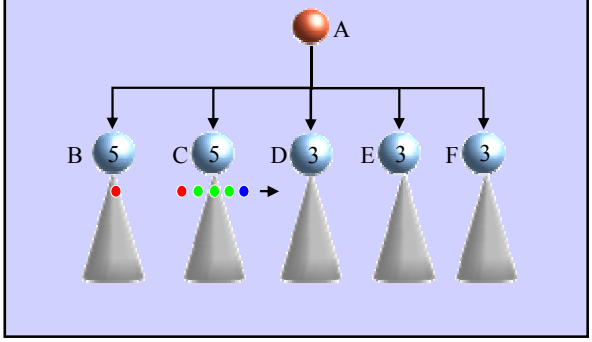


Nombres de Strahler : arbres planaires

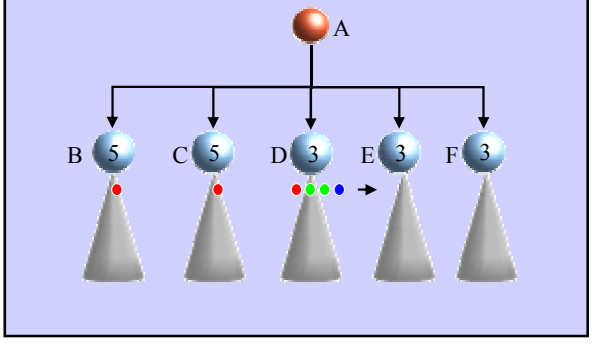
Evaluation ascendante
- Valeur de feuille 1
- Les valeurs des fils d'un noeud sont triées
- Calcul d'un noeud



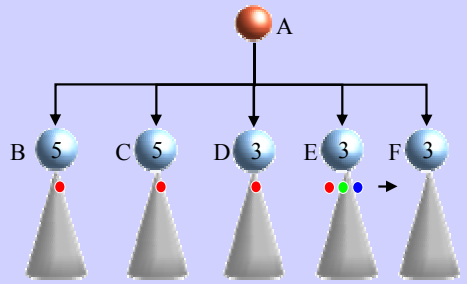
Nombres de Strahler : arbres planaires



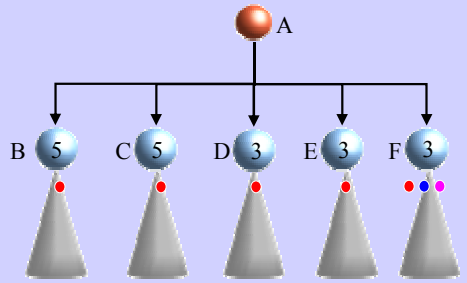
Nombres de Strahler : arbres planaires



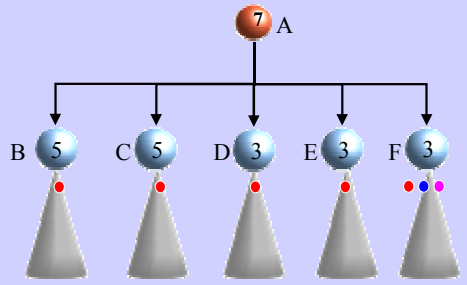
Nombres de Strahler : arbres planaires



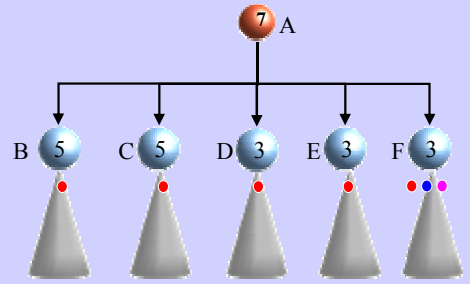
Nombres de Strahler : arbres planaires



Nombres de Strahler : arbres planaires

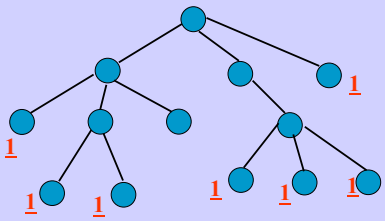


Nombres de Strahler : arbres planaires

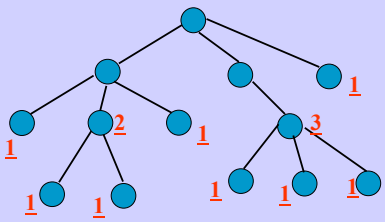


Formule $\sigma(v) = \underset{0 \le i \le p}{Max}\, \sigma(v_i) + i$

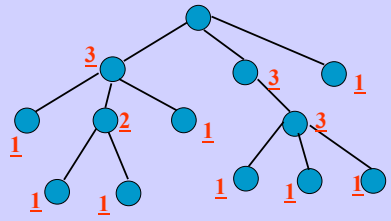
Nombres de Strahler : arbres planaires



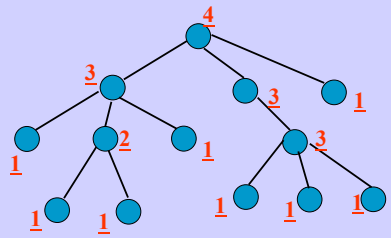
Nombres de Strahler : arbres planaires



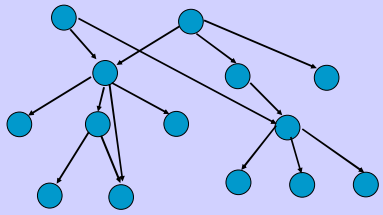
Nombres de Strahler : arbres planaires



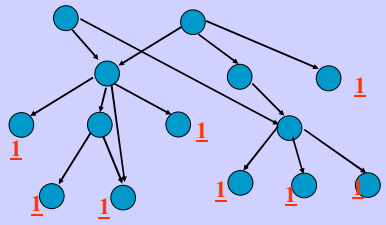
Nombres de Strahler : arbres planaires



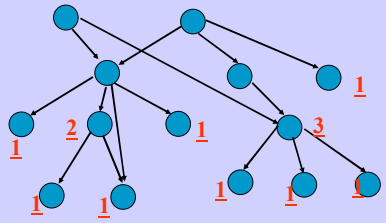
Nombres de Strahler : DAG



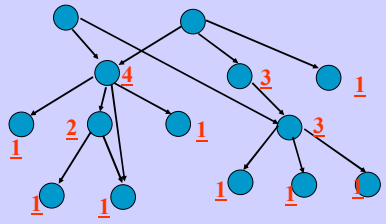
Nombres de Strahler : DAG



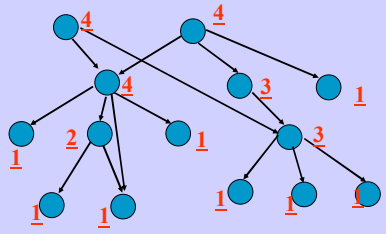
Nombres de Strahler : DAG



Nombres de Strahler : DAG



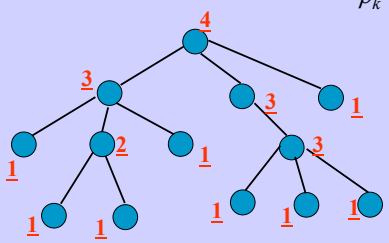
Nombres de Strahler : DAG



Nombres de Strahler : propriété

- $B_{k,n}$ nombre de segments

$$\rho_k = \lim_{n \to +\infty} \frac{B_{k,n}}{B_{k+1,n}}$$



- 1-segment …8
- 2-segment …1
- 3-segment …2
- 4-segment …1

Théoreme : $\rho_k \approx 4$

Nombres de Strahler : propriété

- Ensembles
  - S_k: arbres dont la racine à pour nombre de strahler = k
  - L_k: arbres dont la racine à pour nombre de strahler < k
  - G_k: arbres dont la racine à pour nombre de strahler > k
- Fonctions génératrices

$$\overline{F}(x) = \sum_{Ttree} x^{|T|} \qquad \overline{S}_k(x,y) = y \sum_{T \in S_k} x^{|T|}$$

$$\overline{L}_k(x) = \sum_{T \in L_k} x^{|T|} \qquad \overline{G}_k(x,y) = \sum_{T \in G_k} y^{\beta_k(T)} x^{|T|}$$

Nombres de Strahler : propriété

- Fonctions génératrices

$\overline{F}(x) = \sum_{T\in tree} x^{|T|}$ $\quad \overline{S}_k(x,y) = y\sum_{T\in S_k} x^{|T|}$ $\quad \overline{L}_k(x) = \sum_{T\in L_k} x^{|T|}$

$\overline{G}_k(x,y) = \sum_{T\in G_k} y^{\beta_k(T)} x^{|T|}$

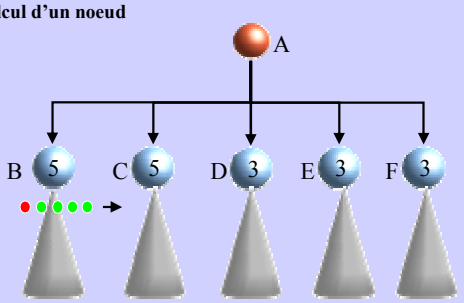
- Méthode
  - Ecrire une equation pour $\overline{G}_k(x,y)$
  - Remarquer que $\left.\frac{\partial \overline{G}_k(x,y)}{\partial y}\right|_{y=1} = \sum_{T\in G_k} \beta_k(T) x^{|T|}$
  - Déduire une expression asymptotique pour le nombre de k-branches dans un arbre de taille n

$$B_{k,n} \approx c_k n^{-1/2} \alpha^{-n} (1+o(1))$$

  - Déduire ρ_k

Nombres de Strahler : arbres planaires

Evaluation ascendante
- Valeur de feuille 1
- Les valeurs des fils d'un noeud sont triées
- Calcul d'un noeud



Nombres de Strahler : propriété

- E(T) : ensemble des valeurs de Strahler numbers des nœuds dans un arbre T
- **Théoreme**

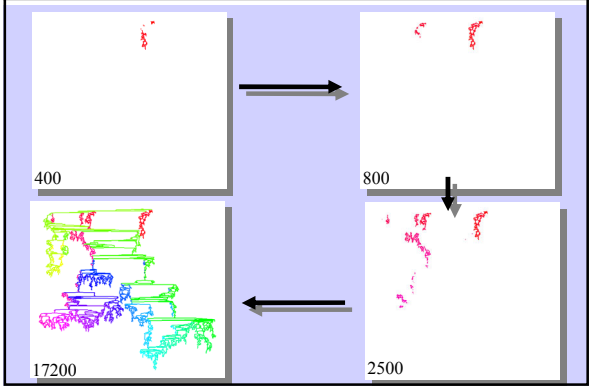
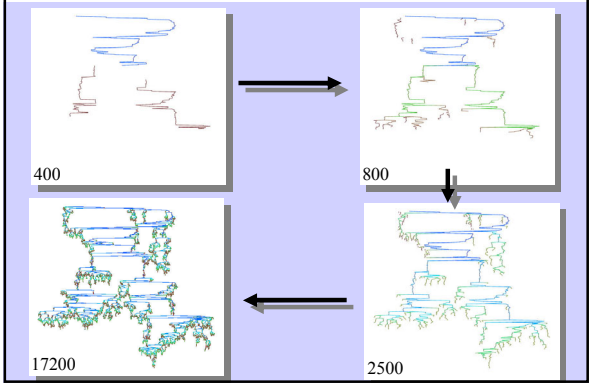
$$|E(T)| \le \left\lceil \sqrt{2|T|} \right\rceil$$

- **Preuve**

Ramener par construction un arbre T à un peigne C tel que

$|C| \le |T|$, $E(C)=E(T)$

Nombres de Strahler : application



Nombres de Strahler : application