PHYSIQUE, COMBINATOIRE ET POLYOMINOS

M. DELEST
LaBRI* - Université Bordeaux I
351, Cours de la Libération
33405 TALENCE CEDEX

Résumé. Dans ce papier, nous donnons les principaux éléments qui permettent de comprendre le lien entre les polyominos et la physique statistique. En particulier, nous donnons une liste des sujets s'y rattachant ainsi que des méthodes utilisées pour la résolution de ces problèmes.

1 - INTRODUCTION

Une *cellule élémentaire* est un carré $[i,i+1] \times [j,j+1]$ de $R\times R$ tel que i et j sont entiers. Un *polyomino* est une union connexe de cellules élémentaires telle que l'intérieur est aussi connexe. Les polyominos sont, en général, définis à une translation près (dans le cas contraire on dit qu'ils sont *fixés*). L'*aire* d'un polyomino est le nombre de cellules élémentaires qui le constituent. Le périmètre est le nombre de segments élémentaires de son pourtour dans $Z\times Z$ (voir figure 1). Les polyominos sont des objets célèbres en Mathématiques car ils constituent un des plus vieux et plus simple (en énoncé!) problème ouvert: existe-t-il une formule pour leur énumération suivant un des deux paramètres?

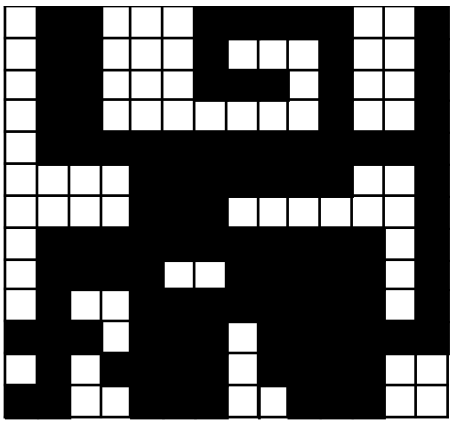


Figure 1. Un polyomino d'aire 105 de périmètre 118.

Ce travail a été financé par le PRC Mathématiques et Informatique

* Unité Associée au Centre National de la Recherche Scientifique n°1304
Adresse électronique maylis@labri.greco-prog.fr

Les polyominos sont connus en Physique sous le nom d’animaux. On obtient un animal à partir d'un polyomino en prenant la réunion des centres des cellules élémentaires du polyomino (figure 2). Ainsi un animal est un ensemble de points de Z^Z tels que deux points quelconques de l'animal peuvent être reliés par un chemin ne faisant que des pas élémentaires Nord, Sud, Est ou Ouest.

Depuis quelques années, il y a eu une grande activité tant en Physique qu'en Mathématiques pour chercher des formules pour des sous-classes de polyominos [22], [5], [16], [26]. Ces sous-classes sont définies à partir de deux propriétés: la convexité, une direction privilégiée. Dans le paragraphe 2, nous décrirons ces propriétés. Ces spécialisations proviennent essentiellement des modèles étudiés en Physique Statistique et plus particulièrement des modèles pour les phénomènes critiques. Nous donnons au paragraphe 3 quelques liens avec la Physique Statistique. On trouvera une étude plus détaillée dans [25], [1]. Nous décrivons un paragraphe 4, quelques fonctions de partitions qui illustrent le lien entre l'énumération de polyominos, suivant l'aire et le périmètre, et les phénomènes physiques. Au paragraphe 5, sont décrites, sans démonstration, les méthodes couramment utilisées pour résoudre de tels modèles. Nous terminons cet article par un exemple de résolution très simple n'utilisant que des bijections et la méthodologie de M.P. Schützenberger : codage par des mots et passage aux séries en commutatif.

2 - CARACTERISATION DES POLYOMINOS ENUMERES

Il existe de fait plusieurs types d'animaux (et donc de polyominos) dépendant du réseau sous-jacent. Les polyominos décrits en introduction sont ceux définis sur réseau carré c. On peut considérer deux autres types de réseaux, hexagonal et triangulaire, qui sont des sous-réseaux du réseau obtenu à partir du réseau c en ajoutant toutes les diagonales (voir figure 3). Un animal est alors un ensemble de cellules élémentaires du réseau tel que deux cellules quelconques du polyomino peuvent être reliées par un chemin ne faisant que des pas élémentaires appartenant au

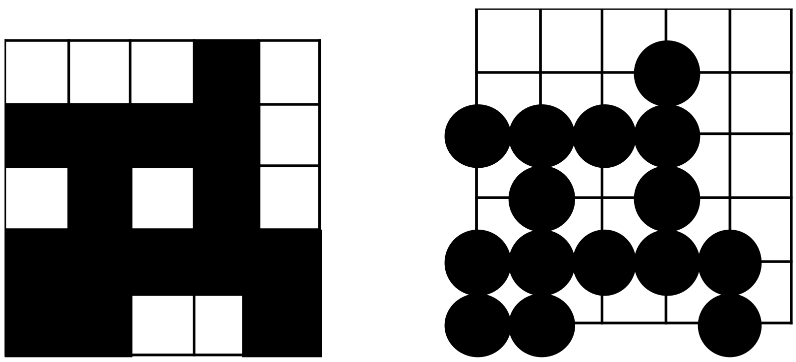


Figure 2. Un polyomino sur réseau carré et son animal associé.

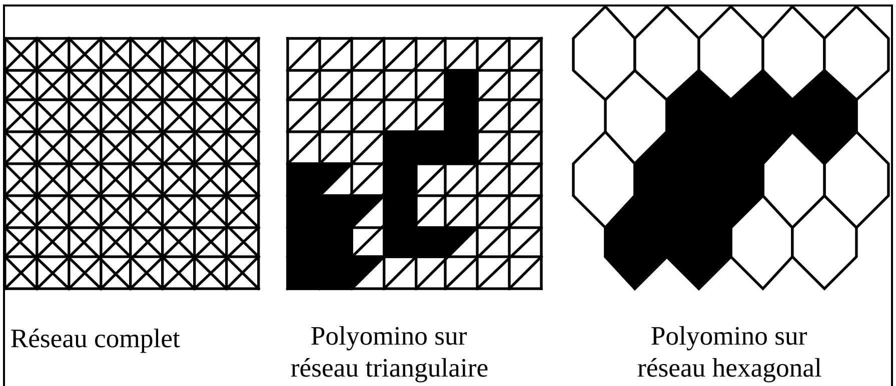


Figure 3. Réseaux autres que carré.

réseau. On trouvera une étude fine des polyominos sur ces réseaux dans [16], [3]. Ici, notre propos ne concernera que le réseau carré.

La *convexité* d'un polyomino est définie relativement à une direction D. Un polyomino est D-convexe si et seulement si son intersection avec toute ligne parallèle à D est un ensemble connexe du réseau carré. On définit ainsi des polyominos verticalement, horizontalement ou diagonalement convexes.

Un chemin du réseau carré est dirigé suivant une direction D si sa projection sur une ligne parallèle à D est un chemin ne revenant jamais en arrière sur cette ligne. Un polyomino est dirigé suivant D si tout point de l'animal peut être atteint en partant d'un point unique (appelé origine) par un chemin dirigé dont tous les sommets sont dans l'animal. La figure 4 montre un animal de direction Nord-est.

Ainsi à partir de ces deux notions, on peut mélanger des directions particulières et des convexités obtenant ainsi des classes de polyominos particuliers.

Par exemple, les polyominos convexes sont convexes suivant deux directions à la fois verticalement et horizontalement [14], [4], [21], les diagonalement convexes dirigés sont convexes suivant la deuxième diagonale et ont pour direction privilégiée

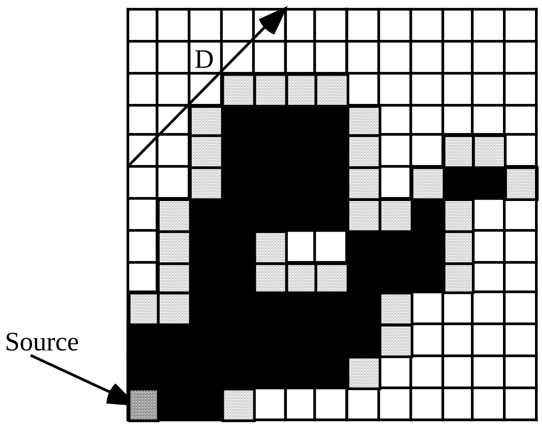


Figure 4. Animal dirigé de direction Nord-Est.

le Nord-est [23],[10]. On trouvera dans [26], une description plus détaillée des diverses classes qui ont été étudiées tant en physique qu'en combinatoire.

Les statistiques autres que l'aire et le périmètre sont toutes relatives à la convexité ou à la direction. Ainsi, on considère:

- le nombre de colonnes (convexité verticale),
- le nombre de lignes (convexité horizontale),
- le nombre de diagonales (convexité suivant une diagonale),

Le *périmètre de site* est lié à la notion de direction. C'est le nombre de cellules du pourtour du polyomino qui, si elles sont ajoutées au polyomino, le laissent dans sa classe. Les cellules grisées de la figure 4 indiquent ce périmètre dans le cas d'une direction Nord-est.

3 - LIEN AVEC LA PHYSIQUE

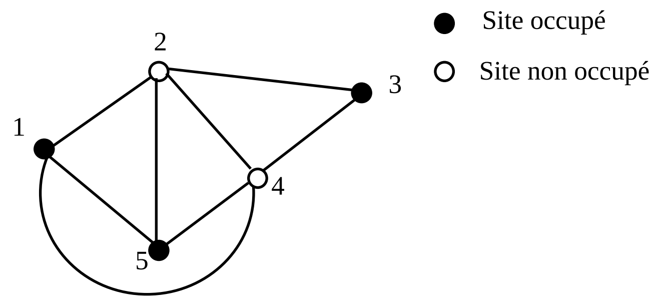
Une liste récente très complète des travaux publiés en Physique sur ce sujet se trouve dans le papier de X. Viennot [26]. Une introduction très pédagogique se trouve également dans le papier de Betrema et Penaud [3]. Nous allons montrer comment apparaît la notion de polyomino.

Les modèles thermodynamiques les plus simples considèrent des graphes dont les sommets sont potentiellement des sites c'est-à-dire pouvant être occupés par des particules. Une disposition particulière de particules est appelée configuration. *L'énergie* de la configuration c (voir figure 5) est calculée par différence entre:

- la contribution individuelle de chaque site,
- la contribution des interactions entre sites reliés par une arête et occupés par des particules,

(1) $$\text{energie}(\mathcal{C}) = \sum_{i \text{ occupé}} \text{energie}(i) - \sum_{\substack{i,j \text{ occupés} \\ (i\ j) \text{ arête}}} \text{energie}(i,j).$$

Un cas particulier est le modèle d'Ising [1] dans lequel les particules sont des aimants (ou spins) ayant deux orientations possibles notées σ_i avec valeurs +1 ou -1. Ainsi dans ce cas l'énergie calculée dans (1) devient :



energie de la configuration :

energie(1) + energie(3) + energie(5) - energie(1,5)

Figure 5. Une configuration.

(2) $$E = -H\sum_{i \text{ site}} \sigma_i - J \sum_{\text{arête } (i,j)} \sigma_i \sigma_j$$

où H désigne le champ magnétique externe et J la constante d'interaction.

Dans le modèle des gaz, un site est simplement vide ou occupé. ces deux situations sont notées s_i qui prend les valeurs 1 ou 0. La formule de calcul d'énergie donnée en (1) devient :

(3) $$E = -\mu\sum_{i \text{ site}} s_i - \varepsilon \sum_{\text{arête } (i,j)} s_i s_j$$

où μ est appelé potentiel chimique. Le cas où $\varepsilon=0$ correspond au gaz parfait. Si $\varepsilon>0$, il y a attraction entre les particules et sinon répulsion.

Ces deux modèles paraissent très différents dans le sens où pour le modèle d'Ising il existe toujours une interaction entre les sites ($\sigma_i =+1$ ou $\sigma_i =+1$) alors que pour le modèle des gaz, cette interaction n'existe que si le site est occupé ($s_i =0$ ou $s_i =1$). Les deux modèles peuvent être comparés en remarquant que

$$\sigma_i = 2s_i - 1 .$$

L'étude statistique d'un modèle se ramène alors à calculer et étudier la fonction Z(T) appelée *fonction de partition* définie par

(4) $$Z(T) = \sum_{C \text{ configuration}} e^{-\text{ energie}(C)/kT}$$

dans laquelle *T* désigne la température absolue et *k* la constante de Boltzmann. L'axiome donné par la formule de Gibbs relie la probabilité d'une configuration c d'énergie E à *kT* de la manière suivante:

(5) $$\Pr(C \ / \text{ energie}(C) = E) = \alpha\, e^{-E/kT}$$

où α est une contante. On a donc

(6) $$\Pr(C \ / \text{ energie}(C) = E) = \frac{e^{-E/kT}}{Z(T)} .$$

Nous montrons dans l'exemple suivant comment ce calcul se ramène à un problème d'énumération. Supposons que deux sites ne puissent être occupés simultanément (particules dures). L'énergie d'une configuration de n sites se réduit alors à $-n\mu$. Soit α_n le nombre de configurations possibles, on a

(7) $$Z(T) = \sum_{n\geq 0} \alpha_n e^{n\mu/kT} .$$

Posons $t = \mu/kT$. Le nombre moyen ω de particules peut être obtenu par dérivation

(8) $$\omega = \frac{\sum_{n\geq 0} n\, \alpha_n t^n}{Z(t)} = t\frac{d}{dt}\ln\ Z(t)\ .$$

Ainsi donc la connaissance de α_n permet d'obtenir des renseignements sur le comportement asymptotique du modèle.

Les polyominos et animaux apparaissent dans le cadre des phénomènes critiques dans lesquels les graphes sont les réseaux hexagonaux, triangulaires ou carré. Dans ce cas, le graphe est infini et on ne peut donc plus considérer le nombre de configurations. On limite alors le réseau en utilisant le nombre de sommets k. La fonction de partition associée Z_k (fonction $Z(t)$ définie sur k sommets) est telle que la quantité

(9) $$\ln\ Z(t) = \lim_{k\to\infty}\frac{\ln\ Z_k}{k}$$

existe. On l'appelle la limite thermodynamique.

REMARQUE

De manière sous-jacente on peut entrevoir la notion d'automate d'état fini familière à la théorie des langages. En effet, en général, la limitation du nombre de sommets entraîne souvent des configurations repérables qui constituent les états de l'automate. Les transitions explicitent alors comment les configurations s'imbriquent pour obtenir une configuration finale. On retrouvera cette notion au paragraphe concernant les méthodes (paragraphe 5) avec les matrices de transition.

Très naturellement, on est donc conduit à calculer le nombre a_n de configurations à n sommets ayant une propriété donnée et surtout sa valeur lorsque n est très grand. On calcule en général un équivalent asymptotique sous la forme

(10) $$a_n \approx C\, n^{-\theta}\, \lambda^n$$

où θ est appelé *classe d'universalité* du modèle c'est à dire qu'il est indépendant des détails microscopiques, λ est appelé *constante de connectivité* et C est le coefficient non universel c'est à dire dépendant des détails du modèle. Suivant la convexité du modèle on s'intéresse à des paramètres de longueur et largeur moyenne qui se déduisent aisément d'une fonction génératrice du type

(11) $$f(z;q) = \sum_{p\geq 0}\ \sum_{n\geq 0} \alpha_{n,p} z^n q^p$$

dans laquelle $\alpha_{n,p}$ désigne le nombre de configurations ayant n sites occupés et présentant la statistique (par exemple nombre de diagonales) de valeur p.

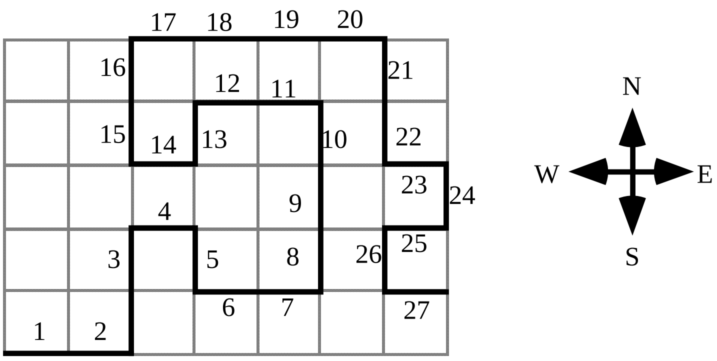


Figure 6. Un chemin ne se recoupant pas ayant 27 pas élémentaires.

Dans ce paragraphe, **4 - QUELQUES EXEMPLES** nous donnons des exemples de fonctions de partitions dans des modèles définis sur réseau carré à partir d'une réalité physique.

Le plus classique est celui des *chaînes polymères*. Ce sont des molécules formées par la répétition d'un même atome. Par exemple le benzène composé de 6 atomes de carbone est un polymère. En réalité les chaînes polymères sont composées parfois de milliers d'atomes et constituent une ligne qui prend une forme dans l'espace. Les statistiques sur ces chaînes permettent d'étudier cette conformation géométrique et d'en déduire des propriétés. Le modèle le plus simple consiste à les assimiler à des chemins aléatoires dans le plan ne se recoupant pas (figure 6). Dans le cas où ces chaînes reviennent à l'origine on obtient ainsi un polyomino général. La fonction de partition est alors donnée par

$$Z(x;q) = \sum_{\omega \text{ chemin}} x^{|\omega|} q^{|t(\omega)|} \tag{12}$$

où $|\omega|$ est le nombre de pas élémentaire du chemin ω et $t(\omega)$ le nombre de changements de direction. Les pas élémentaires sont tout ou partie des quatre pas de la figure 6: Est, Ouest, Nord ou Sud.

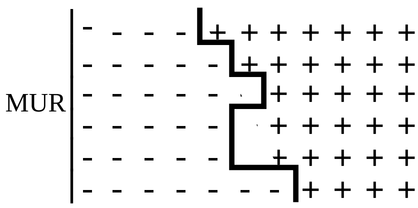
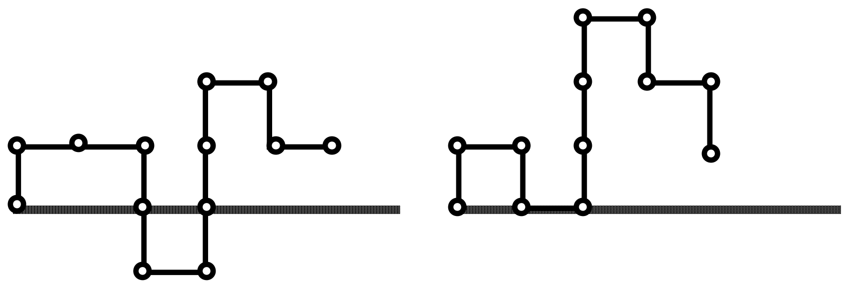


Figure 7. Modèle SOS.



Milieu pénétrable

Contribution $x^{12} q^{0}$

Milieu impénétrable

Contribution $x^{11} q^{1}$

Figure 8. Chaines polymères plongées dans un milieu.

La coexistence de deux zones dans des phénomènes thermodynamiques est étudiée à travers le modèle SOS (i.e. solide sur solide). Les deux zones, formées respectivement de spins positifs et négatifs, sont séparées par une ligne d'interface qui forme un chemin ne se recoupant pas dans le plan (voir figure 7). Ce modèle bien que paraissant semblable au précédent est fort différent car dans le calcul de l'énergie intervient des différences de potentiel externe, due au milieu, et interne du aux interactions avec le *mur*. Dans ce cas, la fonction de partition s'écrit sous une forme proche le la distribution de gauss.

Certains phénomènes physiques sont relatifs aux chaînes polymères plongées dans un milieu c'est à dire ayant des possibilités d'attachement à une surface. C'est le cas notamment pour les lubrifiants et les colles. Le modèle associé est alors constitué de chemins utilisant des pas Nord, Est et Sud (voir figure 8) et la fonction de partition est ramenée au calcul de

$$\text{(13)} \qquad Z(x;q) = \sum_{\omega \text{ chemin}} x^{|\omega|} q^{|\omega_s|}$$

où $|\omega|$ est le nombre de pas élémentaires du chemin ω et ω_s est la partie du chemin commune avec la surface perméable.

Tous les modèles ci-dessus sont rattachés aux polyominos car le "bord" est un chemin dans le plan. Les modèles d'animaux tels qu'on les trouve en Physique sont reliés aux transition de phase et la fonction de partition est alors fonction du nombre de cellules du modèle (i.e. la surface du polyomino associé). Cette fonction caractérise dans ce cas les propriétés statistiques de l'entropie du modèle. On calcule donc en général

$$\text{(14)} \qquad Z(x;q) = \sum_{\alpha \text{ animal}} x^{\mathrm{per}(\alpha)} q^{|\alpha|}$$

où per(α) est le périmètre (éventuellement de site) associé à l'animal, et $|\alpha|$ est le nombre de cellules de l'animal.

L'ensemble de tous ces modèles peuvent être généralisés à plusieurs dimensions et donnent souvent des résultats exacts [17].

5 - METHODES DE RESOLUTION

Nous ne prétendons pas ici donner une description exhaustive mais tout au plus citer quelques méthodes très employées.

La méthode des matrices de transfert [1] s'apparente fort à la notion d'automate d'état fini en langage formel et dans certains cas se rattache aux matrices stochastiques. On limite l'étude des animaux à une bande de largeur fini k dans le plan. Le phénomène de construction d'un animal est alors décrit par une matrice M de dimension $2^k-1 \times 2^k-1$. Soit $M_{i,j}$ une entrée de la matrice. Les représentations en base 2 des nombres i et j donnent les positions des sites occupés (bits à 1) à l'étape considéré dans l'animal. La valeur $M_{i,j}$ correspond au poids attaché à la configuration qui consiste à coller une ligne de cellules de type i avec une ligne de cellule de type j. La puissance $n^{ième}$ de la matrice M permet de calculer toutes les configurations pondérées ayant n lignes et de largeur au plus k. Les énumérations recherchées sont alors obtenues par des calculs classiques de déterminants.

Pour tout entier naturel i, notons $\beta(i)$ le nombre de bits à 1 dans la représentation binaire de i. Considérons, par exemple, le problème d'énumérer des animaux quelconques. On peut approcher ce dénombrement en limitant l'étude à une bande de largeur k. Ainsi pour k=2, on aura la matrice suivante:

$$(15) \qquad M = \begin{pmatrix} t & 0 & t \\ 0 & t & t \\ t^2 & t^2 & t^2 \end{pmatrix}$$

dans laquelle chaque entrée de la ligne i est valuée par $t^{\beta(i)}$. La quantité

$$(16) \qquad \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} t^{\beta(j)} M^n(i,j)$$

est alors le polynôme énumérateur des animaux ayant une largeur 2 et une longueur n. On peut alors de proche en proche déduire des équations de récurrence dépendant de la largeur et de la longueur et ainsi déduire des formules exactes ou des expressions asymptotiques. Un résultat marquant obtenu par cette méthode fut la résolution du modèle des animaux dirigés suivant l'aire [20],[18].

La méthode de Temperley consiste à construire la suite des fonctions génératrices des animaux $\{f_n\}_{n\geq 0}$ où n correspond à la valeur d'un certain paramètre de l'animal. Par exemple dans [5], Brak et Guttmann construisent la suite des fonctions génératrices des polyominos parallélogrammes indicée par le nombre de cellules de la première colonne. De cette suite de fonction on peut déduire en général une équation de récurrence et ceci conduit à une équation différentielle que l'on résout au cas par cas. Une pratique fort utile alors est le calcul à partir de l'équation des premiers termes de la série pour "deviner" quelle fonction est la solution. Plusieurs méthodes permettent de parvenir à ce résultat:

- les approximants algébriques de Brak et Guttmann [6],
- la méthode gfun de Bergeron, Plouffe [2].

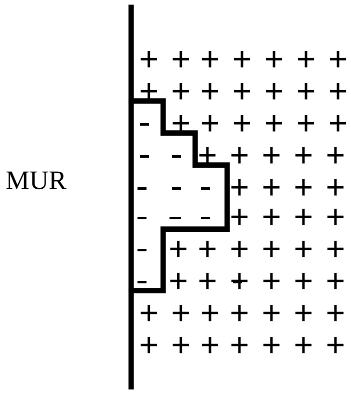


Figure 9. Polyomino tas.

Enfin la méthode utilisant la Combinatoire énumérative est celle qui provient des travaux de M.P. Schützenberger [21] et qui a été généralisée par Delest et Fédou [12]. Le papier initiateur de ces travaux fut celui de Delest et Viennot sur les polyominos convexes. Ils donnèrent une formule close pour le nombre de polyominos de périmètre 2n+8

$$p_{2n+8} = (2n+11)4^n - 4(2n+1)\binom{2n}{n}. \tag{17}$$

Nous donnons un bref aperçu de toute cette méthode ci-dessous sur un exemple choisi volontairement très simple celui des animaux tas. Ce cas de figure est un cas particulier du modèle SOS dans lequel le chemin part du "mur" revient au mur en faisant dans un premier temps des pas Est et Sud, puis uniquement des pas Ouest et Sud (figure 9).

La première étape consiste à donner une bijection entre les polyominos tas et les mots d'un langage rationnel (dans le cas général algébrique). Soit F l'ensemble des mots w de $\{x,a\}^*$ tels que $|w|_a$ est paire. On peut associer bijectivement un mot de F a un polyomino tas en suivant le chemin et en codant chaque pas Est ou Ouest par un a et chaque pas Sud par un x. Le premier et le dernier pas seront omis dans le codage. Pour l'exemple de la figure 9 on obtient

$$w = a\,x\,a\,x\,a\,x\,x\,a\,a\,x\,x\,a.$$

Dans ce mot la longueur du chemin est donnée par $|w|_a + |w|_x$ et le périmètre du polyomino par $|w|_a + 2|w|_x$.

Dans une deuxième étape, on écrit le système non commutatif d'équations associé au langage F:

$$L = a\,L\,a\,L_1 + x\,L + e \tag{18}$$

$$L_1 = \varepsilon + x\,L_1 \tag{19}$$

La troisième étape permet en général d'obtenir la fonction génératrice Z(x;1) suivant la longueur du chemin. On prend "l'image commutative" du système et on applique le morphisme $\mu(x) = \mu(a) = t$, on obtient la solution:

$$Z(t;1) = \frac{1-t}{1-2t}. \tag{20}$$

Lorsque cette méthodologie peut-être appliquée, la technique des q-grammaires développée par Delest et Fédou, permet de déduire l'équation satisfaite par la fonction de partition et ainsi d'obtenir parfois une forme close. Cette technique consiste à traduire l'aire sur chaque monôme des équations sous la forme d'une fonction récursive τ appelée attribut fonction d'un monôme en q. On obtient par exemple pour l'équation (18)

$$\tau(L) = q^{|\tau(L)|_x}\, a\, \tau(L)\, a\, \tau(L_1), \qquad (\text{pour } L \to a\, L\, a\, L_1) \tag{21}$$

$$\tau(L) = q\, x\, \tau(L), \qquad (\text{pour } L \to x\, L) \tag{22}$$

$$\tau(L) = \varepsilon, \qquad (\text{pour } L \to \varepsilon) \tag{23}$$

On déduit ainsi le système de q-équations

$$Z(x,a;q) = qx\, Z(x,a;q) + a^2\, Z(xq,a)\, Z_1(x,a;q) + \varepsilon, \tag{24}$$

$$Z_1(x,a;q) = qx\, Z_1(x,a;q) + \varepsilon \tag{25}$$

La résolution du système permet de déduire la fonction de partition de ce modèle

$$Z(t;q) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^{n+3} q^{n+1} (1 - xq^{n+1})}{(1-xq)^2 (1-xq^2)^2 \ldots (1-xq^{n+1})^2}. \tag{26}$$

REMERCIEMENTS

Ce travail n'aurait jamais vu le jour sans les encouragements de Maurice Nivat et la patience de Jacques Mazoyer.

REFERENCES

[1] R. BAXTER, *Exactly solved models in statistical mechanics*, Academic Press, 1982.
[2] F. BERGERON, S. PLOUFFE, Une méthode de calcul de séries algébriques, raport UQAM,1991.
[3] J. BETREMA, J.G. PENAUD, Animaux dirigés et arbres de guingois, rapport LaBRI 1992.
[4] M. BOUSQUET-MELOU, *q-énumération de polyominos convexes*, publication du LACIM n°9, Université du Québec à Montréal, Montréal, 1991.

[5] R. BRAK, A.J. GUTTMANN, Exact solution of the staircase and row-convex polygon perimeter and area generating function, J. Phys. A, 23 (1990), 4581-4588.
[6] R. BRAK, A.J. GUTTMANN, Algebraic approximants: a new method of series analysis, J. Phys. A, 1990.
[7] M. DELEST, Polyominoes and animals: some recent results, to appear in J. of Maths Chemistry.
[8] M. DELEST, Enumeration of polyominoes using Macsyma, Theorical Computer Science, 79 (1991), 209-226.
[9] M. DELEST, S. DULUCQ, Enumeration of directed column-convex animals with given perimeter and area, Rapport LaBRI, Bordeaux, n°87-15.
[10] M.DELEST, J.M. FEDOU, Exact formulas for fully compact animals, Rapport Interne LaBRI, Bordeaux, n°89-06.
[11] M. DELEST, J.M. FEDOU, Enumeration of skew Ferrers diagrams, to appear in Discrete Maths.
[12] M. DELEST, J.M. FEDOU, Attribute grammars are usefull for combinatorics, Actes des Journées Traitement des séries en variables non commutatives de Paris, Rapport Université de Rouen, Eds. G. Duchamps, G. Jacob et D. Krob, Avril 1990, à paraitre dans TCS.
[13] M. DELEST, N. ROUILLON, Manuel d'utilisation de Xpolyo, Greco Programmation, LaBRI, Université de Bordeaux I (1991)
[14] M. DELEST, X. VIENNOT, Algebraic languages and polyominoes enumeration, Theor. Comp. Sci., 34(1984), 169-206.
[15] K.O. GEDDES, G.H. GONNET, B.W. CHAR, *Maple, User's Manual*, Research report CS-83-41, University of Waterloo, 1983.
[16] A.J. GUTTMANN, Planar polygons: regular, convex, almost convex, staircase and row convex, rapport Juin 91.
[17] A.J. GUTTMANN, T. PRELLBERG, Stair case polygons, elliptic integrals, Heun functions and lattice green functions, Rapport Université d'Oxford, OUTP 92-55S, 1992.
[18] V. HAKIM, J.P. NADAL, Exact result for 2D directed lattice animals on a strip of finite with, J. Phys. A: Math. Gen. 16 (1983), L 213-L 218.
[19] K.Y. LIN, Exact solution of the convex polygon perimeter and area generating function, J. Phys. A: Math. Gen. 21, 2635-2642.
[20] J.P. NADAL, B.DERRIDA, J. VANNIMENUS, Directed lattices animals in 2 dimension: numerical and exact results, J. Physique 43 (1982), 1561.
[21] M.P. SCHUTZENBERGER, Certain elementary families of automata, in Proc. Symp. on Mathematical Theory of Automata, Polytechnic Institute of Brooklyn, 1962, 139-153.
[22] V. PRIVMAN, N.M. SVRAKIC, *Directed models of polymers, interfaces, and clusters: scaling and finite-size properties,* Lecture notes in Physics n°338, Springer-Verlag, 1989.
[23] V. PRIVMAN, N.M. SVRAKIC, Exact generating function for fully directed compact lattice animals, Physical Review Letters, 60, 123, 1107-1109.
[24] N.J. SLOANE, *A handbook of integer sequences,* Academic Press, New-York (1979).
[25] H.N.V. TEMPERLEY, Phys. Rev. 103, 1.
[26] X.G. VIENNOT, A survey of polyominoes enumeration, Actes du Colloque Séries formelles et Combinatoire Algébrique, Montréal 1992.