

## Corrigé du Devoir Maison n° 2

### Exercice 1

a)  $P(A) = 2/3$ ,  $P(C|A) = 1/6$  et  $P(C|B) = 1/10$ .

b) On a  $C = (C \cap A) \cup (C \cap B)$

d'où  $P(C) = P(C \cap A) + P(C \cap B) = P(C|A)P(A) + P(C|B)P(B) = 13/90$ .

On trouve donc

$$P(A|C) = \frac{P(C \cap A)}{P(C)} = \frac{P(C|A)P(A)}{P(C)} = \frac{10}{13},$$

$$P(B|C) = \frac{P(C \cap B)}{P(C)} = \frac{P(C|B)P(B)}{P(C)} = \frac{3}{13}.$$

### Exercice 2

a) On utilise la formule de l'espérance :

$$E(X) = \sum_{w \in \Omega} P(w)X(w).$$

On a  $\forall w$ ,  $P(w) = \frac{1}{6}$  d'où

$$E(X) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 i = \frac{7}{2}.$$

On utilise la formule de la variance

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{6} \left( \sum_{i=1}^6 i^2 \right) - \left( \frac{7}{2} \right)^2 = \frac{35}{12}.$$

b) On a

$$E(S_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{7}{2}.$$

Les variables  $X_i$  sont indépendantes, on a donc de plus

$$V(S_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(X_i) = \frac{35}{12n}.$$

c) L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet d'affirmer que

$$\forall \epsilon > 0, Pr(|S_n - \frac{7}{2}| \geq \epsilon) \leq \frac{V(S_n)}{\epsilon^2}.$$

Avec  $\epsilon = 0.1$ , on obtient

$$Pr(|S_n - \frac{7}{2}| \geq 0.1) \leq \frac{875}{3n}.$$

d) On doit avoir

$$Pr(|S_n - \frac{7}{2}| \leq 0.1) \geq 0.999$$

or

$$1 - Pr(|S_n - \frac{7}{2}| \geq 0.1) > 1 - \frac{875}{3n}$$

et

$$Pr(|S_n - \frac{7}{2}| \leq 0.1) = 1 - Pr(|S_n - \frac{7}{2}| > 0.1)$$

donc il suffit d'avoir

$$1 - \frac{875}{3n} \geq 0.999.$$

En prenant  $n \geq 291667$  on a bien

$$Pr(|S_n - \frac{7}{2}| \leq 0.1) > 1 - \frac{875}{3n} > 0.999.$$

### Exercice 3

a) Les v.a.  $Y$  et  $Z$  sont indépendantes. Donc, on a

$$Pr(Y = i, Z = j) = Pr(X = i)Pr(Z = j) = q_i r_j.$$

b) On partitionne l'événement  $(X = k)$  comme suit :

$$\{X = k\} = \bigcup_{i+j=k} \{Y = i, Z = j\} = \bigcup_{i=0}^k \{Y = i, Z = k - i\}.$$

On en déduit

$$P(X = k) = \sum_{i=0}^k P(Y = i, Z = k - i).$$

C'est à dire

$$p_k = \sum_{i=0}^k q_i r_{k-i}.$$

c) Les variables  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  suivent une loi binomiale de paramètres respectifs  $(n + m, 1/2)$   $(m, 1/2)$  et  $(n, 1/2)$ . Donc, on a

$$p_k = P(X = k) = \frac{1}{2^{m+n}} \binom{m+n}{k},$$

$$q_i = P(Y = i) = \frac{1}{2^m} \binom{m}{i},$$

$$r_j = P(Z = j) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{j}.$$

En reportant dans l'égalité précédente on obtient

$$\frac{1}{2^{m+n}} \binom{m+n}{k} = \sum_{i=0}^k \frac{1}{2^m} \binom{m}{i} \frac{1}{2^n} \binom{n}{k-i}.$$

Donc

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{m}{i} \binom{n}{k-i}.$$