

Devoir Maison n° 2

Préambule : Les trois exercices sont indépendants. On veillera particulièrement à la concision et à la clarté de la rédaction.

Exercice 1

On dispose de deux dés à 6 faces (numérotées de 1 à 6) et d'un dé à 10 faces (numérotées de 1 à 10). L'expérience consiste à choisir un dé au hasard puis à le lancer.

On note A l'événement « le dé choisi a six faces », B l'événement « le dé choisi a dix faces » et C l'événement « j'obtiens le score 1 ».

a) Que valent les probabilités $P(A)$, $P(C|A)$ et $P(C|B)$? (Il n'est pas nécessaire de justifier cette réponse).

b) Que valent les probabilités $P(A|C)$ et $P(B|C)$?

Exercice 2

On dispose d'un dé (à six faces) que l'on lance plusieurs fois de suite. Soit X_i la variable aléatoire correspondant au score du $i^{\text{ème}}$ lancer et S_n la moyenne des n premiers lancers :

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

a) Calculez l'espérance et la variance de X_i .

b) Calculez l'espérance et la variance de S_n .

c) En utilisant l'inégalité de Chebychev donnez une majoration de la probabilité que S_n s'écarte de son espérance de plus de 0.1 : $P_r(|S_n - \frac{7}{2}| > 0.1)$.

d) Calculez n tel que $P_r(|S_n - \frac{7}{2}| \leq 0.1) \geq 0.999$.

Exercice 3

Soit n et m deux entiers positifs. On tire à *pile* ou *face* $m + n$ fois. On suppose que tous les résultats sont équiprobables.

Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre total de *piles* obtenus, Y correspondant au nombre de *piles* obtenus au cours des m premiers lancers et Z le correspondant au nombre de *piles* obtenus au cours des n derniers lancers.

Pour un entier k quelconque, on note $p_k = P_r(X = k)$, $q_k = P_r(Y = k)$ et $r_k = P_r(Z = k)$.

a) Exprimez $P_r(Y = i, Z = j)$ en fonction de q_i et r_j .

b) Exprimez p_k en fonction des q_i et r_j pour i et j inférieurs à k .

c) En déduire l'égalité suivante :

$$C_{m+n}^k = \sum_{i=0}^k C_m^i C_n^{k-i} .$$