

Corrigé du Devoir Maison n° 3

Exercice 1

1) On doit avoir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Donc

$$\int_{-e}^{-1} \frac{a}{x} dx + \int_{-1}^0 (x + 1 - a) dx = 1$$

$$[a \ln(|x|)]_{-e}^{-1} + \left[\frac{x^2}{2} + x - ax \right]_{-1}^0 = 1$$

d'où

$$a = -\frac{1}{4}$$

La fonction de répartition de la variable aléatoire X est définie par

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$$

Par suite, on a

$$\begin{aligned} \text{Si } x \in]-\infty, -e[\text{ alors } F_X(x) &= 0 \\ \text{Si } x \in [-e, -1[\text{ alors } F_X(x) &= \left[-\frac{1}{4} \ln(|u|) \right]_{-e}^x = -\frac{1}{4} \ln\left(\frac{|x|}{e}\right) \\ \text{Si } x \in [-1, 0[\text{ alors } F_X(x) &= \frac{1}{4} + \left[\frac{u^2}{2} + \frac{5u}{4} \right]_{-1}^x = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{4}x \\ \text{Si } x \in [0, +\infty[\text{ alors } F_X(x) &= 1 \end{aligned}$$

2) L'espérance mathématique de la variable aléatoire X est donnée par

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt$$

Donc

$$E(X) = \int_{-e}^{-1} \frac{-1}{4} dt + \int_{-1}^0 \left(t^2 + \frac{5t}{4} \right) dt$$

$$E(X) = \left[\frac{-t}{4} \right]_{-e}^{-1} + \left[\frac{t^3}{3} + \frac{5t^2}{8} \right]_{-1}^0$$

et par suite

$$E(X) = \frac{(1-e)}{4} + \frac{1}{3} - \frac{5}{8} = -\frac{1}{24} - \frac{e}{4}$$

Exercice 2

1) Soit μ et σ l'espérance et l'écart type de la variable X . Alors la variable

$$U = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

suit une loi normale centrée réduite. Donc, on a

$$\begin{cases} \Pr(U < \frac{2-\mu}{\sigma}) = 0,0668 \\ \Pr(U < \frac{1\frac{2}{\sigma}-\mu}{\sigma}) = 1 - 0,1587 \end{cases}$$

En utilisant la table, on recherche x et y tel que

- $M(x, y) = 0,9332$ donc $x = 1,5$ et $y = 0$.
- $M(x, y) = 0,8413$ donc $x = 1$ et $y = 0$.

On a donc

$$\begin{cases} \frac{2-\mu}{\sigma} = -1,5 \\ \frac{12-\mu}{\sigma} = 1 \end{cases}$$

Donc $\mu = 8$ et $\sigma = 4$. On veut que

$$\Pr(|X| < a + 3) = 0.95$$

Donc

$$\Pr(-a - 3 < X < a + 3) = 0,95$$

Par suite, après changement de variable

$$\Pr\left(\frac{-a - 11}{4} < U < \frac{a - 5}{4}\right) = 0,95$$

On a $a > 5$ car la borne supérieure doit être positive. On peut donc considérer que

$$\Pr\left(U < \frac{-a - 11}{4}\right)$$

est négligeable car

$$\Pr(U < -4) < 1 - 0.99989.$$

On a donc

$$\Pr\left(U < \frac{a - 5}{4}\right) = 0,95.$$

En utilisant la table, on recherche x et y tel que $M[x, y] = 0.95$. On a $x = 1,6$ et $y = 0,05$.

Donc

$$\frac{a - 5}{4} = 1.65$$

D'où $a = 11,6$.

Exercice 3

On doit avoir

$$\int_0^1 \int_0^y \frac{k}{\sqrt{xy}} dx dy = 1$$

$$2k \int_0^1 dy = 1$$

Donc $k=1/2$.

Si $x \leq 0$ et $y \leq 0$ alors $F_{X,Y}(x, y) = 0$. Si $x \geq 1$ et $y \geq 1$ alors $F_{X,Y}(x, y) = 1$. Soit $0 < x \leq y < 1$. On a

$$F_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2} \int_0^x \int_t^y \frac{1}{\sqrt{ut}} du dt$$

$$\text{et donc } F_{X,Y}(x, y) = 2\sqrt{xy} - x$$

Exercice 4

On a pour $n \geq 1$

$$Y_n = \sum_{i=1}^n X_i \frac{1}{2^{n+1-i}}$$

Montrons cette propriété par récurrence. Si $n = 1$ alors

$$Y_1 = \frac{1}{2}(X_1 + Y_0) = \frac{1}{2}X_1$$

Supposons la propriété vraie au rang n alors

$$Y_{n+1} = \frac{1}{2}(X_{n+1} + Y_n) = \frac{1}{2}X_{n+1} + \sum_{i=1}^n X_i \frac{1}{2^{n+2-i}}$$

Donc

$$Y_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} X_i \frac{1}{2^{n+2-i}}$$

et la propriété est démontrée.

Par suite, la variable aléatoire Y_n est une combinaison linéaire de variables normales centrées d'écart type σ indépendantes donc cette variable suit une loi normale centrée de variance

$$V(Y_n) = \sum_{i=1}^n V(X_i) \frac{1}{2^{2(n+1-i)}}$$

$$V(Y_n) = \sigma^2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^{2i}}$$

$$V(Y_n) = \frac{1}{4} \sigma^2 \frac{1 - \frac{1}{4^n}}{1 - \frac{1}{4}}$$

Donc

$$V(Y_n) = \frac{1}{3} \sigma^2 \left(1 - \frac{1}{4^n}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V(Y_n) = \frac{\sigma^2}{3}$$

Et par suite la loi de la suite Y_n a pour écart-type

$$\frac{\sigma}{\sqrt{3}}$$