

Corrigé du Devoir n° 1

Exercice 1

L'espace de probabilité Ω est l'ensemble des choix possibles de 10 ampoules parmi 24. On note D l'événement "les ampoules défectueuses sont toutes les deux sélectionnées". Pour un événement A , on note $|A|$ le *cardinal* de l'ensemble A .

Puisque l'on tire les ampoules au hasard, tous les choix d'ampoules sont équiprobables. On a donc, $P(D) = \frac{|D|}{|\Omega|}$.

Il existe C_{24}^{10} façons de choisir 10 éléments parmi 24, donc $|\Omega| = C_{24}^{10}$.

Si les deux ampoules défectueuses sont choisies, il existe C_{22}^8 choix possibles pour les 8 autres ampoules. Par conséquent, $|D| = C_{22}^8$.

Finalement on obtient : $P(D) = \frac{C_{22}^8}{C_{24}^{10}}$.

Exercice 2

Nous noterons X la variable aléatoire représentant le gain effectué par le stand.

1. Soit A l'évènement "la somme fait 7".

$A = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$ et son cardinal vaut 6.

Le cardinal de l'ensemble des valeurs possibles est 6^2 . Ainsi, la probabilité de l'évènement A est $\frac{6}{6^2} = \frac{1}{6}$.

2. L'espérance de X représente le gain en moyenne du stand. Pour le stand, les gains possibles sont $5 - k$ (le joueur gagne k euros en jouant 5 euros) et 5 euros (le joueur ne gagne pas). La probabilité de gagner pour un joueur est de $\frac{1}{6}$, donc la probabilité de perdre est de $\frac{5}{6}$. Ainsi pour que le stand gagne en moyenne de l'argent, il faut :

$$E(X) > 0$$

$$\frac{1}{6} \cdot (5 - k) + \frac{5}{6} \cdot 5 > 0$$

$$k < 30$$

Pour que le stand gagne de l'argent en moyenne, il faut que k reste inférieur à 30 euros.

3. Si $k = 25$ et qu'il y a 100 clients, nous notons le nombre de gagnants z . Que vaut z pour qu'il y ait un gain de 100 euros ?

$$100 = (5 - k) \times z + 5 \times (100 - z)$$

$$25z = 400$$

$$z = 16$$

Pour que le stand gagne 100 euros, il faut qu'il y ait 16 gagnants sur les 100 clients.

4. Soit la variable aléatoire Y qui représente le nombre de gagnants au jeu des 2 dés. Cette variable aléatoire Y suit une **loi binomiale** de paramètres 100 (nombre de clients) et $\frac{1}{6}$ (probabilité de gagner aux dés).

Donc la probabilité que le stand gagne 100 euros est égale à la probabilité qu'il y ait 16 gagnants sur les 100 clients, c'est-à-dire :

$$P(Y = 16) = C_{100}^{16} \left(\frac{1}{6}\right)^{16} \left(\frac{5}{6}\right)^{84}$$

Exercice 3

Dans cet exercice on utilise les notations suivantes :

- ToT = "Le jeu est un TacOTac".
- M = "Le jeu est un Morpion".
- S = "Le jeu est un Solitaire".
- D = "Le jeu est un Dédé".

On notera l'événement G = "le jeu est gagnant".

1. Par définition des probabilités conditionnelles, on a :

$$p(ToT \cap G) = p(G|ToT) \times p(ToT) = \frac{2}{100} \times \frac{4}{20} = \frac{1}{250}$$

$$p(M \cap G) = p(G|M) \times p(M) = \frac{7}{100} \times \frac{5}{20} = \frac{7}{400}$$

$$p(S \cap G) = p(G|S) \times p(S) = \frac{15}{1000} \times \frac{6}{20} = \frac{9}{2000}$$

$$p(D \cap G) = p(G|D) \times p(D) = \frac{4}{100} \times \frac{5}{20} = \frac{1}{100}$$

2. Calculons d'abord la probabilité qu'un jeu pris au hasard soit gagnant :

$$\begin{aligned} p(G) &= p(G \cap ToT) + p(G \cap M) + p(G \cap S) + p(G \cap D) \\ &= \frac{1}{250} + \frac{7}{400} + \frac{9}{2000} + \frac{1}{100} = \frac{8}{2000} + \frac{35}{2000} + \frac{9}{2000} + \frac{20}{2000} \\ &= \frac{72}{2000} = 0,036. \end{aligned}$$

Maintenant, on peut calculer toutes les probabilités grâce à la formule des probabilités conditionnelles :

$$p(ToT|G) = \frac{p(ToT \cap G)}{p(G)} = \frac{8}{2000} \times \frac{2000}{72} = \frac{1}{9} \approx 0,11.$$

$$p(M|G) = \frac{p(M \cap G)}{p(G)} = \frac{35}{2000} \times \frac{2000}{72} = \frac{35}{72} \approx 0,486.$$

$$p(S|G) = \frac{p(S \cap G)}{p(G)} = \frac{18}{2000} \times \frac{2000}{72} = \frac{9}{72} \approx 0,125.$$

$$p(D|G) = \frac{p(D \cap G)}{p(G)} = \frac{20}{2000} \times \frac{2000}{72} = \frac{20}{72} \approx 0,28.$$

Exercice 4

1. Il faut utiliser la propriété : $\sum_{0 \leq i, j} P(X = i \cap Y = j) = P(\Omega) = 1.$

On calcule :

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq i, j} P(X = i \cap Y = j) &= \sum_{0 \leq i, j} \frac{\alpha}{2^{i+j}} \\ &= \sum_{0 \leq i, j} \frac{\alpha}{2^{i+j}} \\ &= \alpha \sum_{0 \leq i, j} \left(\frac{1}{2}\right)^i \left(\frac{1}{2}\right)^j \\ &= \alpha \left(\sum_{0 \leq i} \left(\frac{1}{2}\right)^i \right) \left(\sum_{0 \leq j} \left(\frac{1}{2}\right)^j \right) \\ &= \alpha \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \right) \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \right) \\ &= 4\alpha. \end{aligned}$$

On a donc $4\alpha = 1$. D'où $\alpha = \frac{1}{4}$.

2. • On calcule la probabilité de l'évènement $(X = i)$.

$$\begin{aligned} P(X = i) &= \sum_{0 \leq j} P(X = i \cap Y = j) \\ &= \sum_{0 \leq j} \frac{\alpha}{2^{i+j}} \\ &= \frac{\alpha}{2^i} \sum_{0 \leq j} \left(\frac{1}{2}\right)^j \\ &= \frac{\alpha}{2^i} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}}\right) \\ &= \frac{1}{2^{i+1}}. \end{aligned}$$

- On calcule la fonction génératrice de X .

$$\begin{aligned} G_X(z) &= \sum_{0 \leq i} P(X = i)z^i \\ &= \sum_{0 \leq i} \frac{z^i}{2^{i+1}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{0 \leq i} \left(\frac{z}{2}\right)^i \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - \frac{z}{2}}\right) \\ &= \frac{1}{2 - z}. \end{aligned}$$

- On cherche à calculer l'espérance et la variance de X . On se sert de la fonction génératrice.

On calcule la dérivée et la dérivée seconde de G_X .

$$\begin{aligned} G'_X(z) &= \frac{1}{(2 - z)^2}, \\ G''_X(z) &= \frac{2}{(2 - z)^3}. \end{aligned}$$

On évalue les dérivées en $z = 1$.

$$\begin{aligned} G'_X(1) &= 1, \\ G''_X(1) &= 2. \end{aligned}$$

On en déduit espérance et variance :

$$\begin{aligned} E(X) &= G'_X(1) = 1, \\ V(X) &= G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2 = 2. \end{aligned}$$

3. La probabilité de l'évènement $(Y = j)$ est $P(Y = j) = \frac{1}{2^{j+1}}$. (Même raisonnement que pour la question 4.2.)

On vérifie que :

$$P(X = i) \times P(Y = j) = \frac{1}{2^{i+1}} \frac{1}{2^{j+1}} = \frac{1}{4} \frac{1}{2^{i+j}} = P(X = i \cap Y = j).$$

Donc les variables X et Y sont indépendantes.

4. • On calcule la probabilité de l'évènement $(Z = k)$.

$$\begin{aligned} P(Z = k) &= P(X = 0 \cap Y = k) + P(X = 1 \cap Y = k - 1) + \dots + P(X = k \cap Y = 0) \\ &= \frac{\alpha}{2^k} + \frac{\alpha}{2^k} + \dots + \frac{\alpha}{2^k} \\ &= \frac{\alpha(k + 1)}{2^k} \\ &= \frac{(k + 1)}{2^{k+2}}. \end{aligned}$$

- On cherche la fonction génératrice de $Z = X + Y$. Comme les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, on a $G_Z(z) = G_X(z) \times G_Y(z)$. Comme X et Y ont même

distribution, $G_X(z) = G_Y(z)$.

On trouve donc $G_Z(z) = G_X(z)^2 = \frac{1}{(2-z)^2}$.

• Par la linéarité de l'espérance, on a $E(Z) = E(X) + E(Y)$. De plus, comme X et Y sont indépendantes, on a $V(Z) = V(X) + V(Y)$.

Comme X et Y ont même distribution, on a $E(X) = E(Y)$ et $V(X) = V(Y)$.

On en déduit l'espérance et la variance de Z :

$$E(Z) = 2E(X) = 2,$$

$$V(Z) = 2V(X) = 4.$$