

Devoir Surveillé n° 1

Préambule : Les documents sont autorisés.

Barème : exercice 1 : 3 points, exercice 2 : 5 points, exercice 3 : 5 points, exercice 4 : 7 points.
Les quatre exercices sont indépendants. On veillera particulièrement à la concision et à la clarté de la rédaction.

Exercice 1

Une boîte contient 24 ampoules. Parmi celles-ci, deux sont défectueuses. Une personne en prend 10 au hasard. Quelle est la probabilité que les ampoules défectueuses soient toutes les deux sélectionnées ?

Exercice 2

Un stand de foire propose un jeu d'argent : le joueur paye 5 euros et lance 2 dés. Le joueur gagne k euros si la somme des deux dés fait 7.

1. Déterminer la valeur minimale de k pour laquelle le stand est rentable (c'est-à-dire ne perd pas d'argent en moyenne).
2. On suppose $k = 25$ euros. Déterminer la probabilité pour que le propriétaire du stand gagne exactement 100 euros si 100 clients viennent jouer une même journée.

Exercice 3

La chance de gagner sur chacun des jeux suivants de la Française des jeux est : 2 % pour les "TacOTac", 4 % pour les "Dédé", 1,5 % pour les "Solitaire" et 7 % pour les "Morpion".
Un habitué des jeux à gratter tente sa chance. Il achète 5 "Morpions", 4 "TacOTac", 6 "Solitaire" et 5 "Dédé".

1. Il choisit un des jeux achetés au hasard. Calculer les probabilités :
 - que le jeu choisi soit un TacOTac gagnant.
 - que le jeu choisi soit un Dédé gagnant.
 - que le jeu choisi soit un Solitaire gagnant.
 - que le jeu choisi soit un Morpion gagnant.
2. Sachant que le jeu choisi est gagnant, calculer les probabilités pour que ce jeu soit :
 - un TacOTac,
 - un Dédé,
 - un Morpion,
 - un Solitaire.

Exercice 4

Un processus produit deux nombres entiers (positifs ou nuls) aléatoires. Soit X et Y les variables aléatoires correspondants au premier et au deuxième nombre. La probabilité de l'évènement $(X = i \cap Y = j)$ est $P(X = i \cap Y = j) = \frac{\alpha}{2^{i+j}}$.

1. Quelle est la valeur de la constante α ?
2. Quelle est la probabilité de l'évènement $(X = i)$? Quelle est la fonction génératrice G_X de la variable aléatoire X ? Calculer l'espérance et la variance de X .
3. Quelle est la probabilité de l'évènement $(Y = j)$? Les variables X et Y sont elles indépendantes ?
4. On pose $Z = X + Y$. Quelle est la probabilité de l'évènement $(Z = k)$? Quelle est la fonction génératrice G_Z de la variable aléatoire Z ? On donnera une expression simple (ne faisant pas intervenir de somme) de cette fonction. Calculez l'espérance et la variance de Z .