

Devoir Surveillé

Préambule : Les documents sont autorisés.

Barème indicatif : exercice 1 : 5 points, exercice 2 : 7 points, exercice 3 : 8 points.

Les trois exercices sont indépendants. On veillera particulièrement à la concision et à la clarté de la rédaction.

Exercice 1

Un test de dépistage du virus de la grippe est proposé par un laboratoire. Ce test est positif à 99% si la personne testée est atteinte de la grippe. Il est positif à 0.1% si la personne testée n'est pas atteinte de la grippe.

Un individu est tiré au hasard parmi une population dont une personne sur 10000 est atteinte de la grippe. Sachant que le test est positif, quelle est la probabilité que la personne testée soit effectivement atteinte de la grippe? De même quelle est la probabilité que la personne ne soit pas atteinte par la grippe, bien que le test ait été positif?

Exercice 2

Un programmeur compile avec succès avec une probabilité p ($0 < p < 1$). Dès qu'une compilation a réussi, le programmeur arrête de lancer des compilations. On suppose que la réussite d'une tentative est indépendante du rang de la tentative (on suppose que le programmeur est très mauvais et donc n'améliore pas son programme à chaque tentative). Soit X le nombre de compilations ayant abouti à un échec avant que la compilation s'exécute correctement.

1. Quelles sont les valeurs que peut prendre la variable aléatoire X ?
2. Donnez la loi de la variable aléatoire X .
3. Sachant que les n premières compilations ont abouti à un échec, quelle est la probabilité de réussite lors du $n + k$ -ième essai, pour $k \in \mathbb{N}$?
4. De même, sachant que les n premières compilations ont abouti à un échec, quelle est la probabilité d'avoir un succès entre le n -ième essai et le $n + k$ -ième essai?

Exercice 3

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \Pr)$ un espace probabilisé discret. Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire. On dit que X suit une loi *binomiale* de paramètres (n, p) (où $n \in \mathbb{N}, 0 \leq p \leq 1$) lorsque : pour tout entier $k \in [0, n]$:

$$\Pr(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

Pour toute variable aléatoire X à valeurs entières, on note G_X la fonction génératrice de X , définie par

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad G_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \Pr(X = k) \cdot z^k.$$

0- Donner une formule simple pour $G_X(z)$ lorsque X suit une loi binomiale $(2, p)$.

1- Montrer que, si X suit une loi binomiale (n, p) , alors $G_X(z) = (pz + 1 - p)^n$.

2- Montrer que, si $G_X(z) = (pz + 1 - p)^n$, alors X suit une loi binomiale (n, p) .

3- Soient X, Y deux variables aléatoires sur Ω , indépendantes. Est-il vrai en général que :

- $G_{X+Y}(z) = G_X(z)G_Y(z)$?
- $G_{X+Y}(z) = G_X(z) + G_Y(z)$?
- $G_{X+Y}(z) = \frac{1}{2}(G_X(2z) + G_Y(2z))$?

4- On suppose que X, Y sont des variables aléatoires sur Ω , indépendantes, de lois binomiales $(n, p), (m, p)$ respectivement.

4.1- Que vaut $G_{X+Y}(z)$?

4.2- La loi de $X + Y$ est-elle :

- binomiale $(n \cdot m, p)$?
- binomiale $(n + m, 2 \cdot p)$?
- binomiale $(n + m, p)$?