

## TD2 Exercice 5

Fonction génératrice et espérance

Récurrance :

$$(n) : p(n, k) = \frac{1}{n} p(n-1, k-1) + \frac{n-1}{n} p(n-1, k) \text{ pour } n \geq 2 \text{ et } 1 \leq k \leq n$$

On pose

$$G_n(z) = \sum_{k=1}^n p(n, k) z^k$$

### Récurrance pour $G_n(z)$

Notons que

$$p(n, 1) = \frac{1}{n} \text{ et } p(n, n) = \frac{1}{n!}$$

On multiplie les membres de R(n) par  $z^k$  et on somme pour  $2 \leq k \leq n-1$ . On a

$$G_n(z) - p(n, n)z^n - p(n, 1)z = \frac{z}{n} (G_{n-1}(z) - p(n-1, n-1)z^{n-1}) + \frac{n-1}{n} (G_{n-1}(z) - p(n-1, 1)z)$$

On a

$$p(n, n)z^n = \frac{z}{n} p(n-1, n-1)z^{n-1} = \frac{z^n}{n!}$$

et

$$p(n, 1)z = \frac{n-1}{n} p(n-1, 1)z = \frac{z}{n}$$

Donc

$$E(n) : G_n(z) = G_{n-1}(z) \frac{z+n-1}{n}$$

### Expression de $G_n(z)$

L'équation E(n) est de la forme  $f(n) = a(n)f(n-1)$ , qui a pour solution  $f(n) = f(2) \prod_{i=3}^n a(i)$

(Peut se démontrer par récurrence trivialement)

On a donc

$$G_n(z) = G_2(z) \prod_{i=3}^n \frac{z+i-1}{i}$$

De plus

$$G_2(z) = p(2, 1)z + p(2, 2)z^2 = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}z^2$$

Donc

$$G_n(z) = \prod_{i=1}^n \frac{z+i-1}{i}$$

$$G_n(z) = \frac{1}{n!} \prod_{i=1}^n (z+i-1)$$

### Espérance du nombre d'affectation pour l'instruction (3)

$$G'_n(z) = \frac{1}{n!} \sum_{i=1}^n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (z+i-1) \text{ et } G'_n(1) = \frac{1}{n!} \sum_{i=1}^n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = H_n \text{ ( } H_n \text{ le } n^{\text{ième}} \text{ nombre}$$

harmonique qui est équivalent à  $\log(n)$  pour  $n$  grand).

Le nombre moyen d'affectation de l'instruction 3 est donc  $\log(n)$  quand  $n$  est grand.

**Remarque**

Si on prend en compte les affectations de la boucle pour on a la fonction génératrice :

$$T_n(z) = \sum_{k=1}^n p(n,k) z^{k+n}$$

Donc

$$T_n(z) = z^n G_n(z)$$

Il vient

$$T'_n(z) = z^n G'_n(z) + n z^{n-1} G_n(z)$$

Donc

$$T'_n(1) = H_n + n$$

Le nombre moyen d'affectations est donc en complexité  $O(n)$ .