TD2 Exercice 5

Fonction génératrice et espérance

Récurrence :

$$(n) : p(n,k) = \frac{1}{n} p(n-1,k-1) + \frac{n-1}{n} p(n-1,k) \text{ pour } n \geq 2 \text{ et } 1 \leq k \leq n$$

On pose

$$G_n(z) = \sum_{k=1}^{n} p(n,k) z^k$$

Récurrence pour $G_n(z)$

Notons que

$$p(n,1) = \frac{1}{n} \text{ et } p(n,n) = \frac{1}{n!}$$

On multiplie les membres de R(n) par z^k et on somme pour $2 \leq k \leq n-1$. On a

$$G_n(z) - p(n,n)z^n - p(n,1)z = \frac{z}{n}(G_{n-1}(z) - p(n-1,n-1)z^{n-1}) + \frac{n-1}{n}(G_{n-1}(z) - p(n-1,1)z)$$

On a

$$p(n,n)z^n = \frac{z}{n} p(n-1,n-1)z^{n-1} = \frac{z^n}{n!}$$

et

$$p(n,1)z = \frac{n-1}{n} p(n-1,1)z = \frac{z}{n}$$

Donc

$$E(n) : G_n(z) = G_{n-1}(z)\frac{z+n-1}{n}$$

Expression de $G_n(z)$

L'équation E(n) est de la forme f(n)=a(n)f(n-1), qui a pour solution $f(n) = f(2)\prod_{i=3}^{n} a(i)$

(Peut se démontrer par récurrence trivialement)

On a donc

$$G_n(z) = G_2(z)\prod_{i=3}^{n} \frac{z+i-1}{i}$$

De plus

$$G_2(z) = p(2,1)z + p(2,2)z^2 = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}z^2$$

Donc

$$G_n(z) = \prod_{i=1}^{n} \frac{z+i-1}{i}$$

$$G_n(z) = \frac{1}{n!}\prod_{i=1}^{n} z+i-1$$

Espérance du nombre d'affectation pour l'instruction (3)

$$G_n'(z) = \frac{1}{n!}\sum_{i=1}^{n}\prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} z+i-1 \text{ et } G_n'(1) = \frac{1}{n!}\sum_{i=1}^{n}\prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} i = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} = H_n$$ (H_n le $n^{ième}$ nombre harmonique qui est équivalent à log(n) pour n grand).

Le nombre moyen d'affectation de l'instruction 3 est donc log(n) quand n est grand.

Remarque
Si on prend en compte les affectations de la boucle pour on a la fonction génératrice :

$$T_n(z) = \sum_{k=1}^{n} p(n,k) z^{k+n}$$

Donc

$$T_n(z) = z^n G_n(z)$$

Il vient

$$T_n'(z) = z^n G_n'(z) + n z^{n-1} G_n(z)$$

Donc

$$T_n'(1) = H_n + n$$

Le nombre moyen d'affectations est donc en complexité O(n).