

La première intégrale vaut :

$$\int_{-\infty}^{\infty} ye^{-y^2} dy = \left[-\frac{e^{-y^2}}{2} \right]_{-\infty}^{\infty} = 0,$$

et la seconde :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}.$$

D'où $\mathbb{E}X = m$.

Espérance de la loi de Cauchy. Pour que la loi de Cauchy admette une espérance, il est nécessaire que sa partie positive et sa partie négative en admette une. Mais nous avons :

$$\frac{1}{\pi} \int_0^L \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2\pi} \left[\ln(1+x^2) \right]_0^L = \frac{\ln(1+L^2)}{2\pi}.$$

2

Quelques Exemples (suite)

Espérance de la loi normale. Pour la v.a. X de paramètres m et σ , nous avons :

$$\mathbb{E}X = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) dx.$$

Introduisons le changement de variable $y = \frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}}$, il vient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sqrt{2}\sigma y + m) e^{-y^2} dy \\ &= \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} ye^{-y^2} dy + \frac{m}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy. \end{aligned}$$

1

On démontre facilement que $\int_0^{\infty} f(x) dx = 1$. On en déduit que f est bien une densité. On peut calculer facilement la f.r. de X . Nous avons en effet :

$$F(t) = \int_0^t f(x) dx = \left[-e^{-\lambda x} \right]_0^t = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Nous avons en particulier $Pr(X > t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t}$. On en déduit, pour $s, t > 0$:

$$\begin{aligned} Pr(X > s + t \mid X > s) &= \frac{Pr(X > s + t \text{ et } X > s)}{Pr(X > s)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} \\ &= e^{-\lambda t} \\ &= Pr(X > t). \end{aligned}$$

Cette propriété est appelée "sans mémoire".

4

Cette expression tend vers ∞ lorsque $L \rightarrow \infty$. On en déduit que la loi de Cauchy n'admet pas d'espérance.

Exemple 4 (Loi Exponentielle). Cette loi a beaucoup d'importance dans l'étude de durée de vie des particules subatomiques en physique théorique et aussi dans celle des files d'attente. Elle possède en effet la propriété "sans mémoire" qui la distingue des autres lois possédant une densité.

On dit la v.a. réelle à valeurs positives X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, si elle admet la densité :

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

3

Propriétés de l'espérance

Dans la suite nous considérons les v.a. admettant une densité. Les propriétés énumérées sont vraies dans le cas général.

Linéarité de l'espérance

Théorème. Soient X et Y deux v.a. définies sur le même espace et soient α et β deux réels quelconques. Alors :

$$\mathbb{E}(\alpha X + \beta Y) = \alpha \mathbb{E}X + \beta \mathbb{E}Y.$$

6

Variance

Définitions. Soit X une v.a. admettant une espérance. La variance de X est définie par :

$$VX = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2,$$

si cette espérance existe. La racine carrée de la variance est appelée écart-type et est notée par σX .

Si une v.a. est de variance 1, on dit qu'elle est réduite.

Propriétés de la Variance

Proposition. On a :

8

On peut montrer que, réciproquement, si une loi, admettant une densité, est sans mémoire, alors elle est exponentielle.

L'espérance de loi exponentielle se calcule facilement et on a :

$$\mathbb{E}X = \int_0^{\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx.$$

Effectuant d'abord le changement de variable $y = \lambda x$, ensuite une intégration par partie (voir aussi **intégrales eulériennes**) permet d'écrire :

$$\mathbb{E}X = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} y e^{-y} dy = \frac{1}{\lambda}.$$

5

Produit

Théorème. Soient X et Y deux v.a. sur le même espace et indépendantes d'espérance finie. Alors la v.a. XY admet une espérance et $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}X \mathbb{E}Y$.

Définition. Une v.a. est dite centrée si son espérance est 0. Si la X admet l'espérance $\mathbb{E}X$, alors la v.a. $Y = X - \mathbb{E}X$ est centrée.

7

Exemple 1 (Loi Uniforme). Rappelons la densité de la loi uniforme étant définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x < b \\ 0 & \text{si } x \geq b. \end{cases}$$

Nous avons :

$$\mathbb{E}X^2 = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx = \left[\frac{x^3}{3(b-a)} \right]_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2 + ab + a^2}{3}.$$

D'où :

$$VX = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \frac{(b+a)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

10

- $VX = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2$.
- $V(\alpha X) = \alpha^2 VX$.
- $V(X + a) = VX$.

Proposition. Si les v.a. X et Y sont indépendantes, alors :

$$V(X + Y) = VX + VY.$$

Nous calculons dans la suite la variance pour les 3 lois dont l'espérance a été calculée.

La loi de Cauchy n'admet pas de variance puisqu'elle n'a pas d'espérance.

9

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}.$$

Pour la première intégrale figurant dans le calcul de $\mathbb{E}X^2$, la méthode d'intégration par partie conduit à :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-y^2} dy &= \left[-y \frac{e^{-y^2}}{2} \right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-y^2}}{2} dy \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \end{aligned}$$

On en déduit $\mathbb{E}X^2 = \sigma^2 + m^2$ et donc :

$$VX = \sigma^2.$$

L'espérance et l'écart-type d'une loi normale de type $\mathcal{N}(m, \sigma)$ ne sont donc que les paramètres m et σ de la loi.

12

Exemple 2 (Loi Normale). Nous avons :

$$\mathbb{E}X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) dx.$$

Le changement de variable $y = \frac{x-m}{\sqrt{2\sigma}}$ permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X^2 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (y\sqrt{2\sigma} + m)^2 e^{-y^2} dy \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-y^2} dy + 2m\sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} ye^{-y^2} dy \\ &\quad + \frac{m^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy. \end{aligned}$$

Or :

$$\int_{-\infty}^{\infty} ye^{-y^2} dy = 0$$

et :

11

Exemple 3 (Loi Exponentielle). Nous avons :

$$\mathbb{E}X^2 = \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx.$$

Le changement de variable $y = \lambda x$ permet d'écrire :

$$\mathbb{E}X^2 = \frac{1}{\lambda^2} \int_0^{\infty} y^2 e^{-y} dy$$

Ce qui vaut $\frac{2}{\lambda^2}$ (voir la fonction Γ). On en déduit :

$$\forall X = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$