Département Licence

Année 2004 – 2005 Session de Juin 2005
ETAPE : INF 5 UE : INF110
Épreuve de : Méthodes Statistiques pour l'Informatique
Date : 20 Juin 2005 Durée : 1h30
Documents de cours et de TD autorisés
Épreuve de Mr Saheb

Indiquez votre code d'**anonymat** : No :

Barème
Questions : 5 points
Exercices 1, 2, 3, 4 : chacun 5 points
NB : Les calculs numériques suivants sont approximatifs

Questions

1. Soit X une v.a. de type $\mathcal{N}(10,6)$ (i.e. normale d'espérance 10 et d'écart-type 6). Trouver les valeurs numériques de $Pr(X \leqslant 13)$ et de $Pr(4 \leqslant X \leqslant 16)$.
2. On admet que le poids d'une personne adulte suit une loi normale de type $\mathcal{N}(70,7)$ (en kg). Avec quelle probabilité un groupe de 20 personnes montant dans un ascenseur ne dépassera pas la limite de sécurité, fixée à 1 500 kg ? Donner la valeur numérique.
3. Dans un jeu à 2 joueurs, on lance 4 dés équilibrés. Si l'on obtient exactement deux faces supérieures ou égales à 4, le premier gagne la mise, sinon, c'est le deuxième qui l'empoche. Le jeu est-il équitable ?
4. Disposant de réalisations d'une v.a. $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$, comment peut-on simuler une réalisation d'une v.a. suivant une loi du Khi-deux à k degrés de liberté ?

Justifier vos réponses.

Solution

1. La v.a. $\frac{X-10}{6}$ est centrée-réduite. Et $Pr(X \leqslant 13) = Pr(\frac{X-10}{6} \leqslant \frac{1}{2})$. On trouve dans une table de loi normale la valeur 0.6915 pour cette probabilité. De façon similaire la probabilité, on a $Pr(4 \leqslant X \leqslant 16) = Pr(-1 \leqslant \frac{X-10}{6} \leqslant 1) = 0.6826$.
2. La somme des poids de 20 personnes suit une loi normale d'espérance de 1400 kg et d'écart-type de $7\sqrt{20}$ kg. On a alors :

$$Pr(X \leqslant 1500) = Pr\left(\frac{X-1400}{7\sqrt{20}}) \leqslant \frac{100}{14\sqrt{5}}\right) + 0.99931.$$

3. Le jeu n'est pas équitable. En effet, la probabilité de gain pour le premier joueur vaut $Pr($ 2 faces $\geqslant$ 4 et deux faces $< 4) = \binom{4}{2} \times (1/2)^4 = \frac{6}{16}$, ce qui est inférieur à 1/2.
4. La somme des carrés de k v.a. normales centrées-réduites indépendantes suit une loi du Khi-deux à k degrés de liberté. Il suffit donc de faire la somme des $\frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}$ pour une réalisation de $X_1, ..., X_k$ de la v.a. de type $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$.

Choisissez 3 exercices parmi les 4 exercices proposés

Exercice 1. Le dé A possède 4 faces rouges et 2 blanches alors que le dé B a 2 rouges et 4 blanches. Tous les deux sont supposés être équilibrés. On lance d'abord une pièce équilibrée pour choisir le dé que l'on utilisera par la suite. Si le résultat est pile, on choisit le dé A, sinon le dé B.

1. Montrer que les faces rouges et blanches ont la même probabilité lorsqu'on lance le dé choisi.
2. Quelle est la probabilité pour qu'on obtienne une face rouge au troisième lancer, sachant que les résultats des deux premiers ont été rouges ?
3. Calculer la probabilité pour que le dé choisi soit A, sachant que les résultats de ses n lancers ont été rouges. Que vaut cette probabilité lorsque n tend vers l'infini ?

Solution

1. On a $Pr($ face blanche $) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{2}$. On en déduit que que les deux couleurs ont la même probabilité.
2. Désignons les événements d'obtention une face rouge au premier, deuxième et troisième lancers par R_1, R_2 et R_3 respectivement. On a :

$$Pr(R_3/R_2 \cap R_3) = \frac{Pr(R_1 \cap R_2 \cap R_3)}{Pr(R_1 \cap R_2)} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^3}{\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{3}{5}.$$

3. D'après la formule de Bayes, on a :

$$Pr(A \text{ } n \text{ lancers rouges }) = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{2^n}{2^n + 1}.$$

   Cette probabilité tend vers 1, lorsque $n \to \infty$.

Exercice 2. On admet que la quantité des précipitations en été suit une loi normale d'espérance $\mu = 10$ litres/m^2 et d'écart-type $\sigma = 4$ litres/m^2. Pour un été de précipitations inférieures à 4 litres/m^2, l'état de sécheresse est décrété.

1. Quelle est la probabilité de l'état de sécheresse ?
2. Quelle est la probabilité pour qu'il n'y ait pas de sécheresse dans les 10 prochaines années ?
3. Écrire la fonction génératrice du nombre d'années consécutives sans sécheresse. Quelle est l'espérance de ce nombre ?

Solution

1. On a $PrX < 4) = Pr(\frac{X-10}{4} < -\frac{3}{2}) = 1 - 0.9332 = 0.0668$ (cf la table).
2. On en déduit que la probabilité de 10 années sans sécheresse vaut approximativement $0.9332^{10} = 0.5008957$.
3. La distribution du nombre d'années consécutives sans sécheresse est géométrique :
   $Pr($ exactement k sans sécheresse $) = 0.9332^k \times 0.0668$. La f.g. de ce nombre vaut $\frac{0.0668}{1-0.9332z}$. Son espérance se calcule soit en dérivant la f.g. soit directement. Elle vaut approximativement : $\frac{0.9332}{0.0668} = 13.977$.

Exercice 3. La probabilité pour que la durée de vie d'un composant électronique dépasse 10 000 heures est de 80% et l'on admet que les pannes des différents composants sont des événements indépendants.

1. Avec 3 composants, on réalise un premier montage "série". Il suffit que l'un des composants tombe en panne pour que le système ne fonctionne plus. Quelle est la probabilité pour que celui-ci fonctionne au moins 10 000 heures ?
2. Avec 3 composants, on réalise un deuxième montage, qui est "parallèle". Dans ce cas pour que le système ne fonctionne pas, il faut que *tous* les 3 composants tombent en panne.
   (a) Quelle est la probabilité pour que le système parallèle fonctionne au moins 10 000 heures ?
   (b) Sachant que le système parallèle, qui a été sous tension pendant 10 000 heures, est en état de fonctionnement, quelle est la probabilité pour trouver au moins un composant défectueux ?

Solution

1. En désignant par X_1, X_2 et X_3 les durées de vie respectives des 3 composants, la probabilité de fonctionnement du système pendant au moins 10 000 heures, dans un montage "série, vaut :

$$Pr(X_1 \geqslant 10000, X_2 \geqslant 10000, X_3 \geqslant 10000) = 0.8^3 = 0.512.$$

2. Dans le cas d'un montage "parallèle" :
   (a) La probabilité de fonctionnement pendant au moins 10 000 heures vaut :

$$Pr(\text{ au moins une des v.a } X_1, X_2, X_3 \geqslant 10000) = 1 - 0.2^3 = 0.992.$$

   (b) En vertu du théorème de Bayes, la probabilité recherchée est ratio entre la probabilité d'une ou de deux défections dans l'intervalle de fonctionnement de durée de 10 000 h et celle d'au moins une pendant le même intervalle. D'où :

$$\begin{array}{ll} Pr(\text{ au moins un composant défectueux} & \mid \text{ le système fonctionne }) \\ & = \frac{3\times 0.8^2\times 0.2+3\times 0.8\times 0.2^2}{0.8^2+3\times 0.8^2\times 0.2+3\times 0.8\times 0.2^2} \\ & = 0.4786. \end{array}$$

Exercice 4. Soit la fonction $f_\theta(x)$ donnée par :

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{\theta}{x^{\theta+1}} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

où θ est un paramètre réel de valeur strictement supérieure à 1.

1. Montrer que f_θ est une densité de probabilité. Soit X une v.a. de densité f_θ.
2. Trouver un estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\theta}_n(x_1, ..., x_n)$ pour le paramètre θ, où $x_1, ..., x_n$ est un échantillon de la v.a. X.
3. Trouver l'espérance de la v.a. X.

Solution

1. On remarque d'abord que $\theta > 1$ implique la convergence de l'intégrale $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{\theta+1}}$. Nous avons alors :

$$\int_1^\infty f_\theta(x)dx = \int_1^\infty \frac{\theta}{x^{\theta+1}}dx = \left[-x^{-\theta}\right]_1^\infty = 1.$$

2. On a la fonction de vraisemblance :

$$L_n = \theta^n \times (x_1...x_n)^{-(\theta+1)} \mathbf{1}_{[1,\infty[}(x_1)...\mathbf{1}_{[1,\infty[}(x_n)$$

   Afin de maximiser cette fonction, nous maximisons son logarithme $\ln(L_n) = n\ln\theta - (\theta + 1)\ln(x_1...x_n)$, pour $x_1, ..., x_n \geqslant 1$. Par la méthode bien connue de dérivation, on trouve l'estimateur qui maximise la vraisemblance :

$$\widehat{\theta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln(x_i)}.$$

3. Pour l'espérance de X, nous avons :

$$\mathbb{E}X = \int_1^\infty \frac{\theta x}{x^{\theta+1}}dx = \int_1^\infty \frac{\theta}{x^\theta}dx$$

   Cette intégrale converge, puisque $\theta > 1$. Nous aurons donc :

$$\mathbb{E}X = \left[\frac{\theta x^{-\theta+1}}{-\theta+1}\right]_1^\infty = \frac{\theta}{\theta-1}.$$