Année 2004 – 2005 Session de Juin 2005
ETAPE : INF 5 UE : INF110
Épreuve de : Méthodes Statistiques pour l'Informatique
Date : 20 Juin 2005 Durée : 1h30
Documents de cours et de TD autorisés
Épreuve de Mr Saheb

Département Licence

Indiquez votre code d'**anonymat** : | No : |

Barème
Questions : 5 points
Exercices 1, 2, 3, 4 : chacun 5 points

Questions

1. Soit X une v.a. de type $\mathcal{N}(10, 6)$ (i.e. normale d'espérance 10 et d'écart-type 6). Trouver les valeurs numériques de $Pr(X \leqslant 13)$ et de $Pr(4 \leqslant X \leqslant 16)$.
2. On admet que le poids d'une personne adulte suit une loi normale de type $\mathcal{N}(70, 7)$ (en kg). Avec quelle probabilité un groupe de 20 personnes montant dans un ascenseur ne dépassera pas la limite de sécurité, fixée à 1 500 kg ? Donner la valeur numérique.
3. Dans un jeu à 2 joueurs, on lance 4 dés équilibrés. Si l'on obtient exactement deux faces supérieures ou égales à 4, le premier gagne la mise, sinon, c'est le deuxième qui l'empoche. Le jeu est-il équitable ?
4. Disposant de réalisations d'une v.a. $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$, comment peut-on simuler une réalisation d'une v.a. suivant une loi du Khi-deux à k degrés de liberté ?

Justifier vos réponses.

Choisissez 3 exercices parmi les 4 exercices proposés

Exercice 1. Le dé A possède 4 faces rouges et 2 blanches alors que le dé B a 2 rouges et 4 blanches. Tous les deux sont supposés être équilibrés. On lance d'abord une pièce équilibrée pour choisir le dé que l'on utilisera par la suite. Si le résultat est pile, on choisit le dé A, sinon le dé B.

1. Montrer que les faces rouges et blanches ont la même probabilité lorsqu'on lance le dé choisi.
2. Quelle est la probabilité pour qu'on obtienne une face rouge au troisième lancer, sachant que les résultats des deux premiers ont été rouges ?
3. Calculer la probabilité pour que le dé choisi soit A, sachant que les résultats de ses n lancers ont été rouges. Que vaut cette probabilité lorsque n tend vers l'infini ?

Exercice 2. On admet que la quantité des précipitations en été suit une loi normale d'espérance $\mu = 10$ litres/m^2 et d'écart-type $\sigma = 4$ litres/m^2. Pour un été de précipitations inférieures à 4 litres/m^2, l'état de sécheresse est décrété.

1. Quelle est la probabilité de l'état de sécheresse ?
2. Quelle est la probabilité pour qu'il n'y ait pas de sécheresse dans les 10 prochaines années ?
3. Écrire la fonction génératrice du nombre d'années consécutives sans sécheresse. Quelle est l'espérance de ce nombre ?

Exercice 3. La probabilité pour que la durée de vie d'un composant électronique dépasse 10 000 heures est de 80% et l'on admet que les pannes des différents composants sont des événements indépendants.

1. Avec 3 composants, on réalise un premier montage "série". Il suffit que l'un des composants tombe en panne pour que le système ne fonctionne plus. Quelle est la probabilité pour que celui-ci fonctionne au moins 10 000 heures ?
2. Avec 3 composants, on réalise un deuxième montage, qui est "parallèle". Dans ce cas pour que le système ne fonctionne pas, il faut que *tous* les 3 composants tombent en panne.
   (a) Quelle est la probabilité pour que le système parallèle fonctionne au moins 10 000 heures ?
   (b) Sachant que le système parallèle, qui a été sous tension pendant 10 000 heures, est en état de fonctionnement, quelle est la probabilité pour trouver au moins un composant défectueux ?

Exercice 4. Soit la fonction $f_\theta(x)$ donnée par :

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{\theta}{x^{\theta+1}} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

où θ est un paramètre réel de valeur strictement supérieure à 1.

1. Montrer que f_θ est une densité de probabilité. Soit X une v.a. de densité f_θ.
2. Trouver un estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\theta}_n(x_1, ..., x_n)$ pour le paramètre θ, où $x_1, ..., x_n$ est un échantillon de la v.a. X.
3. Trouver l'espérance de la v.a. X.