Département Licence

Année 2004 – 2005 Session de Janvier 2005
ETAPE : INF 5 UE : INF110
Épreuve de : Méthodes Statistiques pour l'Informatique
Date : 7 Janvier 2005 Durée : 1h30

Documents de cours et de TD autorisés
Épreuve de Mr Saheb

Indiquez votre code d'**anonymat** : No :

Barème
Questions : 6 points
Exercices 1, 2, 3, 4 : chacun 5 points

Questions

1. Quelle est la loi de la somme des trois v.a. indépendantes de types $\mathcal{N}(2,3)$, $\mathcal{N}(-5,2)$ et $\mathcal{N}(4,3)$ respectivement ? On rappelle que $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$ représente la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ.
2. Écrire la f.r. (fonction de répartition) de la v.a. associée au produit de tirages de deux dés équilibrés.
3. Quelle est la probabilité pour qu'une v.a. normale s'écarte d'au moins 4 fois son écart-type de son espérance ? Donner la valeur numérique.
4. Soient X et Y deux v.a. indépendantes, admettant chacune une espérance et une variance. Écrire l'espérance et la variance de la v.a. $4X-3Y$ en fonction de celles de X et de Y.

Justifier vos réponses.

Choisissez 3 exercices parmi les 4 exercices proposés

Exercice 1. On lance n dés équilibrés. À l'issue du premier lancer, on reprend les dés qui n'ont pas donné l'as. On procède alors à un second lancer avec les dés restants, et ainsi de suite jusqu'à obtenir n as.

Soit X_n, la v. a. représentant le nombre de jets nécessaires pour obtenir n as.

1. Pour un dé, calculer la probabilité pour que X_1 soit égale à k.
2. Calculer la probabilité pour que X_1 soit inférieure ou égale à k.
3. Quelle est la probabilité pour que X_n soit inférieure ou égale à k ?
4. Quelle est la probabilité que l'on obtienne les n as au k^{ieme} lancer ?

Exercice 2. Deux usines A et B proposent chacune un lot de pièces détachées. Le nombre de pièces défectueuses dans le lot pour chacune des usines est une v.a. qui suit une loi de Poisson de paramètre 5 pour A et de paramètre 8 pour B. On choisit une des usines avec la même probabilité $\frac{1}{2}$ et l'on y achète le lot proposé.

1. Donner l'expression de probabilité pour que le nombre de pièces défectueuses dépasse 5.
2. Quelles sont l'espérance et la variance du nombre de pièces défectueuses ?

3. Sachant que le nombre de pièces défectueuses a été 5, quelle est l'expression de probabilité pour que le lot provienne de l'usine A ?

Exercice 3. Dans l'algorithme de *hachage avec essais uniformes* on dispose d'une suite infinie $h_1, h_2, ...$ de fonctions de hachage, associant chacune à une clé une valeur dans $\{1, 2, ...m\}$ dans la table de hachage. Les $h_i(x)$ sont supposées être indépendantes et uniformément réparties dans $\{1, 2, ...m\}$. Ces fonctions sont essayées l'une après l'autre jusqu'à ce qu'on trouve une case libre dans la table. Soit p_k la probabilité pour que k essais soient effectués pour trouver une case libre, en supposant que la table contient déjà $n < m$ éléments.

1. Montrer que $p_k = \alpha^{k-1}(1-\alpha)$, où $\alpha = \frac{n}{m}$ est le taux d'occupation.
2. Donner la fonction génératrice et l'espérance du nombre d'essais pour insérer un élément.
3. Quel est le nombre moyen d'essais dans une recherche négative ?

Exercice 4. Trouver l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\lambda}_n(x_1, ..., x_n)$ pour le paramètre λ d'une v.a. exponentielle de densité $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.

1. Un échantillon de 100 lampes électriques a été choisi au hasard pour en tester la durée de vie. Une durée totale de 88 912 heures a été observée. En supposant que la durée de vie est une v.a. qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, donner l'estimateur du maximum de vraisemblance pour λ.
2. Pour $\lambda = \frac{11}{10\ 000}$, quelle est la probabilité pour que la durée de vie d'une lampe soit entre 500 h et 1000 h (on ne demande pas la valeur numérique de cette probabilité) ?