UNIVERSITÉ BORDEAUX 1
Sciences Technologies
Département Licence

Année 2005 – 2006 Session de Janvier 2006
ETAPE : INF 5 UE : INF110
Épreuve de : Méthodes Statistiques pour l'Informatique
Date : 10 Janvier 2006 Durée : 1h30

Documents autorisés
Épreuve de Mr Saheb

Indiquez votre code d'**anonymat** : No :

Barème
Questions : 5 points
Exercices 1, 2, 3, 4 : chacun 5 points

Questions
(Justifier vos réponses)

1. Si A et B sont indépendants, peut-on confirmer que A et $\overline{B}$ le sont aussi ?
2. Soit $Pr(B/A) < Pr(B)$, où les événements A et B sont supposés être de probabilité non nulle. Que peut-on dire de $Pr(A/B)$ et $Pr(A)$?
3. Peut-on déduire de $Pr(B/A) = Pr(B/\overline{A})$, où A et $\overline{A}$ sont supposés de probabilité non nulle, que A et B sont indépendants ?
4. Soient X et Y deux v.a. normales indépendantes de types $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1)$ et $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2)$ respectivement. Pour quelles valeurs des facteurs réels α et β la v.a. $\alpha X + \beta Y$ devient une v.a. normale centrée-réduite ?

Choisissez 3 exercices parmi les 4 exercices proposés

Exercice 1. La distribution conjointe des v.a. X et Y est donnée dans le tableau suivant :

X \ Y	-1	0	1	2
-1	0	1/36	1/6	1/12
0	1/18	0	1/18	0
1	0	1/36	1/6	1/12
2	1/12	0	1/12	1/6

1. Trouver $Pr(X \geqslant 1 \cap Y \leqslant 0)$.
2. Quelle est la probabilité conditionnelle pour que $Y \leqslant 0$ sachant que $X = 2$?
3. X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Donner la distribution de $Z = XY$.

Exercice 2. On tire indépendamment deux v.a. X et Y uniformément dans l'intervalle réel $[a, b]$, où $a < b$. Posons $Z = \min\{X, Y\}$.

1. Calculer $Pr(Z > z)$ pour $z \in [a, b]$.
2. En déduire la fonction de répartition et la densité de la v.a. Z.

3. Calculer l'espérance et la variance de Z.

Exercice 3. Soit $A = \{a, b, c\}$ un alphabet à 3 lettres. Soit r un entier positif fixé. On effectue une suite de tirages (avec remises) uniformes de lettres dans A, jusqu'à ce qu'on obtienne r occurrences de "c". L'événement associé au tirage est alors le mot tiré et l'espace des événements sera donc :

$$\Omega \;=\; \{w \in A^* \mid |w|_c = r \text{ et } w \text{ se termine par une occurrence de "}c\text{"}\}.$$

On rappelle que $|w|_c$ est le nombre d'occurrences de "c" dans w et que $|w|$ est la longueur de w.

1. Pour $r = 2$, énumérer les mots de longueur 3 de Ω. Quelle est la probabilité de ce tirage ?
2. Montrer que l'on peut munir Ω d'une mesure de probabilité : $\forall w \in \Omega,\ Pr(w) =$ probabilité du tirage de w, avec $\sum_{w\in\Omega} Pr(w) = 1$.
3. On définit la v.a. $X : \Omega \to \mathbb{N}$, par $X(w) = |w|$. Calculer $Pr(X = n)$, pour $n = r, r+1, r+2, \ldots$.
4. Trouver la fonction génératrice de X (la méthode conseillée est l'utilisation du résultat bien connu sur la f.g. de la somme des v.a. indépendantes).

Exercice 4. Soit X une v.a. réelle uniformément répartie dans l'intervalle $[\theta_1, \theta_2]$, où θ_1 et θ_2, sont deux paramètres donnés (on suppose $\theta_1 < \theta_2$).

1. Donner la densité de la v.a. X et calculer son espérance et sa variance.
2. Écrire la densité conjointe $f_{\theta_1,\theta_2}(x_1, \ldots, x_n)$ de $(X_1, \ldots, X_n)$, où $X_1, \ldots, X_n$ sont n réalisations indépendantes de X.
3. Trouver les valeurs de θ_1 et θ_2 qui maximisent $f_{\theta_1,\theta_2}(x_1, \ldots, x_n)$, pour un vecteur $(x_1, \ldots, x_n)$ donné ; la solution est simple et ne nécessite pas de dérivation.