Licence Informatique
Université Bordeaux I **MSI 2004-2005**

Correction Devoir Maison n° 1

1) $X_{10}(abbaaaabaa) = 4$.

2) On écrit tout les mots de $\Omega_1,\ \Omega_2\ et\ \Omega_3$ et on détermine leur image par X. En sommant dans chacun des cas, on obtient :

$$\begin{aligned} G_1(z) &= 1 \\ G_2(z) &= \frac{3}{4} + \frac{z}{4} \\ G_3(z) &= \frac{5}{8} + \frac{2z}{8} + \frac{z^2}{8}\ . \end{aligned}$$

3) On voit que $A_1 = \{a\}$, $B_1 = \{b\}$, $P_r(a) = P_r(b) = \frac{1}{2}$ et $X(a) = X(b) = 0$. On a donc

$$\begin{aligned} H_1(z) &= \frac{1}{2} \\ K_1(z) &= \frac{1}{2}\ . \end{aligned}$$

4) Par définition, $H_n(1) = \sum_{w\in A_n} P_r(w)$. Or $\sum_{w\in A_n} P_r(w)$ est la probabilité de A_n. La probabilité de A_n est la probabilité que la dernière lettre d'un mot de n lettres soit a. Tout les mots étant équiprobables cette probabilité est $P_r(A_n) = \dfrac{1}{2}$. Donc $H_n(1) = \dfrac{1}{2}$.
De même $K_n(1) = P_r(B_n) = \dfrac{1}{2}$.

5) Par définition $G_n(z) = \sum_{w\in\Omega_n} P_r(w)z^{X_n(w)}$. Il est clair que $\Omega_n = A_n \bigcup B_n$ et que cette union est disjointe d'où :

$$\sum_{w\in\Omega_n} P_r(w)z^{X_n(w)} = \left(\sum_{w\in A_n} P_r(w)z^{X_n(w)}\right) + \left(\sum_{w\in B_n} P_r(w)z^{X_n(w)}\right)\ .$$

On a donc la relation $G_n(z) = H_n(z) + K_n(z)$.

6) On suit l'indication de l'énoncé qui nous invite à écrire

$$A_{n+1} = \{wa \text{ tel que } w \in A_n\} \bigcup \{wa \text{ tel que } w \in B_n\}\ .$$

(Dans la ligne ci-dessus, on note wa un mot de $n+1$ lettre formé du mot de n lettres w auquel on rajoute la lettre a.)
Il est bien clair que cette union est disjointe. On en déduit :

$$H_{n+1} = \sum_{w\in A_{n+1}} P_r(w)z^{X_{n+1}(w)} = \left(\sum_{w\in A_n} P_r(wa)z^{X_{n+1}(wa)}\right) + \left(\sum_{w\in B_n} P_r(wa)z^{X_{n+1}(wa)}\right)\ . \quad (1)$$

Maintenant, on remarque que $\forall w \in \Omega_n,\ P_r(wa) = \dfrac{1}{2}Pr(w)$ (car $P_r(w) = \dfrac{1}{2^n}$ et $P_r(wa) = \dfrac{1}{2^{n+1}}$).
D'autre part $X_{n+1}(wa) = X_n(w)$ si w finissait par la lettre b (car les occurrences du motif aa sont toute dans w) et $X_{n+1}(wa) = X_n(w) + 1$ si w finissait par la lettre a (car il y a une occurrence supplémentaire du motif aa à la fin du mot wa). On a donc

$$\sum_{w\in A_n} P_r(wa)z^{X_{n+1}(wa)} = \sum_{w\in A_n} \frac{1}{2}P_r(w)z^{X_n(w)+1} = \frac{z}{2}\sum_{w\in A_n} P_r(w)z^{X_n(w)} = \frac{z}{2}H_n(z)$$

et

$$\sum_{w\in B_n} P_r(wa)z^{X_{n+1}(wa)} = \sum_{w\in B_n} \frac{1}{2}P_r(w)z^{X_n(w)} = \sum_{w\in B_n} \frac{1}{2}P_r(w)z^{X_n(w)} = \frac{1}{2}K_n(z)\ .$$

En reportant ces égalités dans l'équation (1) on obtient

$$H_{n+1}(z) \; = \; \frac{z}{2}H_n(z) + \; \frac{1}{2}K_n(z) \; .$$

De même, on a

$$B_{n+1} = \{wb \text{ tel que } w \in A_n\} \bigcup \{wb \text{ tel que } w \in B_n\} \; .$$

D'où,

$$K_{n+1} \; = \; \left(\sum_{w \in A_n} P_r(wb) z^{X_{n+1}(wb)} \right) + \left(\sum_{w \in B_n} P_r(wb) z^{X_{n+1}(wb)} \right) \; . \tag{2}$$

On remarque que $\forall w \in \Omega_n, \; P_r(wb) = \dfrac{1}{2}Pr(w)$ et $\forall w \in \Omega_n, \; X_{n+1}(wb) = X_n(w)$ (car on ne crée pas d'occurrences supplémentaires du motif aa en rajoutant la lettre b) dont on déduit

$$\sum_{w \in A_n} P_r(wb) z^{X_{n+1}(wb)} = \sum_{w \in A_n} \frac{1}{2} P_r(w) z^{X_n(w)} = \frac{1}{2} \sum_{w \in A_n} P_r(w) z^{X_n(w)} = \frac{1}{2}H_n(z)$$

et

$$\sum_{w \in B_n} P_r(wb) z^{X_{n+1}(wb)} = \sum_{w \in B_n} \frac{1}{2} P_r(w) z^{X_n(w)} = \sum_{w \in B_n} \frac{1}{2} P_r(w) z^{X_n(w)} = \frac{1}{2}K_n(z) \; .$$

En reportant ces égalités dans l'équation (2), on obtient

$$K_{n+1}(z) \; = \; \frac{1}{2}H_n(z) + \; \frac{1}{2}K_n(z) \; .$$

7) (Question optionnelle)

En vue du système d'équation de la question précédente, il suffit de prendre $M = \begin{pmatrix} \frac{z}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

On montre maintenant la propriété $\begin{pmatrix} H_{n+1}(z) \\ K_{n+1}(z) \end{pmatrix} = M^n \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ par récurrence sur n :

- Pour $n = 0$, il s'agit de montrer que $\begin{pmatrix} H_1(z) \\ K_1(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ ce qui a été fait en question n° 3.
- Supposons la propriété vrai au rang n. $\left(\text{On suppose donc } \begin{pmatrix} H_{n+1}(z) \\ K_{n+1}(z) \end{pmatrix} = M^n \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} . \right)$

  On sait que $\begin{pmatrix} H_{n+2}(z) \\ K_{n+2}(z) \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} H_{n+1}(z) \\ K_{n+1}(z) \end{pmatrix}$.

  Donc, en utilisant l'hypothèse de récurrence, il vient $\begin{pmatrix} H_{n+2}(z) \\ K_{n+2}(z) \end{pmatrix} = M^{n+1} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

  La propriété est donc vrai au rang $n + 1$.

La propriété est donc vrai pour tout $n \geq 0$.