Devoir Maison n° 1

Préambule : Les questions 1, 2, 3 ne demandent **aucune** justification : seul le résultat sera pris en compte. Les questions 4 et 5 demandent une explication **brève**. De manière générale, on veillera à la concision et à la clarté dans les réponses fournis.

On se propose d'étudier le nombre d'occurrences d'un motif (c'est à dire un sous-mot) dans un mot de taille n.

Pour modéliser ce problème, on considère l'espace de probabilité $\Omega_n = \{a, b\}^n$ dans lequel tous les événements élémentaires sont équiprobables. Chaque événement élémentaire est considéré comme un mot de n lettres. On adopte aussi une notation mot. Par exemple, les éléments de Ω_2 sont notés $\Omega_2 = \{aa, ab, ba, bb\}$.
Sur l'espace de probabilité Ω_n on considère la variable aléatoire X_n définit comme le nombre d'occurrence du sous-mot aa. Par exemple, on a $X_5(aabab) = 1$ et $X_5(baaab) = 2$.

1) Que vaut $X_{10}(abbaaaabaa)$?

On note $G_n(z)$ la série génératrice de X_n.

2) Calculez $G_1(z),\ G_2(z)$ et $G_3(z)$.

Soit A_n l'ensemble des mots de longueur n terminant par la lettre a et B_n l'ensemble des mots de longueur n terminant par la lettre b.
On définit les séries $H_n(z)$ et $K_n(z)$ par $H_n(z) = \sum_{w \in A_n} P_r(w) z^{X_n(w)}$ et $K_n(z) = \sum_{w \in B_n} P_r(w) z^{X_n(w)}$.

3) Que valent $H_1(z)$ et $K_1(z)$?

4) Que valent $H_n(1)$ et $K_n(1)$? (Justifiez brièvement votre réponse.)

5) Établir une relation simple entre $G_n(z),\ H_n(z)$ et $K_n(z)$.

6) Montrez que $H_{n+1}(z) = \frac{z}{2} H_n(z) + \frac{1}{2} K_n(z)$. On pourra remarquer qu'un mot de A_{n+1} est soit un mot de A_n auquel on rajoute la dernière lettre a soit un mot de B_n auquel on rajoute la dernière lettre a.
De même, montrez que $K_{n+1}(z) = \frac{1}{2} H_n(z) + \frac{1}{2} K_n(z)$.

7) (Question optionnelle) Montrez qu'il existe une matrice de dimension 2×2, $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \gamma \end{pmatrix}$ telle que le système de la question 5 se mette sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} H_{n+1}(z) \\ K_{n+1}(z) \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} H_n(z) \\ K_n(z) \end{pmatrix} .$$

En déduire que $\begin{pmatrix} H_{n+1}(z) \\ K_{n+1}(z) \end{pmatrix} = M^n \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.