Licence Informatique
Université Bordeaux I **MSI 2004-2005**

Devoir Maison n° 2

Préambule : Les trois exercices sont indépendants. On veillera particulièrement à la concision et à la clarté de la rédaction.

Exercice 1

On dispose de deux dés à 6 faces (numérotées de *1* à *6*) et d'un dé à 10 faces (numérotées de *1* à *10*). L'expérience consiste à choisir un dé au hasard puis à le lancer.
On note A l'événement « le dé choisi a six faces », B l'événement « le dé choisi a dix faces » et C l'événement « j'obtiens le score *1* ».
a) Que valent les probabilités $P(A)$, $P(C|A)$ et $P(C|B)$? (Il n'est pas nécessaire de justifier cette réponse).
b)Que valent les probabilités $P(A|C)$ et $P(B|C)$?

Exercice 2

On dispose d'un dé (à six faces) que l'on lance plusieurs fois de suite. Soit X_i la variable aléatoire correspondant au score du $i^{\text{ème}}$ lancer et S_n la moyenne des n premiers lancers : $S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.
a) Calculez l'espérance et la variance de X_i.
b) Calculez l'espérance et la variance de S_n.
c) En utilisant l'inégalité de Chebychev donnez une majoration de la probabilité que S_n s'écarte de son espérance de plus de 0.1 : $P_r(|S_n - \frac{7}{2}| > 0.1)$.
d) Calculez n tel que $P_r(|S_n - \frac{7}{2}| \leq 0.1) \geq 0.999$.

Exercice 3

Soit n et m deux entiers positifs. On tire à *pile* ou *face* $m+n$ fois. On suppose que tous les résultats sont équiprobables.
Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre total de *piles* obtenus, Y correspondant au nombre de *piles* obtenus au cours des m premiers lancers et Z le correspondant au nombre de *piles* obtenus au cours des n derniers lancers.
Pour un entier k quelconque, on note $p_k = P_r(X = k)$, $q_k = P_r(Y = k)$ et $r_k = P_r(Z = k)$.
a) Exprimez $P_r(Y = i, Z = j)$ en fonction de q_i et r_j.
b) Exprimez p_k en fonction des q_i et r_j pour i et j inférieurs à k.
c) En déduire l'égalité suivante :

$$C_{m+n}^{k} = \sum_{i=0}^{k} C_m^i C_n^{k-i} .$$