Corrigé du Devoir Maison n° 3

Exercice 1

1) On doit avoir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Donc

$$\int_{-e}^{-1} \frac{a}{x}dx + \int_{-1}^{0}(x+1-a)dx = 1$$

$$[a\ln(|x|)]_{-e}^{-1} + \left[\frac{x^2}{2} + x - ax\right]_{-1}^{0} = 1$$

d'où

$$a = -\frac{1}{4}$$

La fonction de répartition de la variable aléatoire X est définie par

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Par suite, on a

$$\begin{array}{l}
\text{Si} x \in]-\infty,-e[\text{alors} F_X(x) = 0 \\
\text{Si} x \in [-e,-1[\text{alors} F_X(x) = \left[-\frac{1}{4}\ln(|u|)\right]_{-e}^{x} = -\frac{1}{4}\ln(\frac{|x|}{e}) \\
\text{Si} x \in [-1,0[\text{alors} F_X(x) = \frac{1}{4} + \left[\frac{u^2}{2}+\frac{5u}{4}\right]_{-1}^{x} = 1+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{4}x \\
\text{Si} x \in [0,+\infty[\text{alors} F_X(x) = 1
\end{array}$$

2) L'espérance mathématique de la variable aléatoire X est donnée par

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$$

Donc

$$E(X) = \int_{-e}^{-1} \frac{-1}{4}dt + \int_{-1}^{0}(t^2 + \frac{5t}{4})dt$$

$$E(X) = \left[\frac{-t}{4}\right]_{-e}^{-1} + \left[\frac{t^3}{3} + \frac{5t^2}{8}\right]_{-1}^{0}$$

et par suite

$$E(X) = \frac{(1-e)}{4} + \frac{1}{3} - \frac{5}{8} = -\frac{1}{24} - \frac{e}{4}$$

Exercice 2

1) Soit μ et σ l'espérance et l'écart type de la variable X. Alors la variable

$$U = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

suit une loi normale centrée réduite. Donc, on a

$$\begin{cases} \Pr(U < \frac{2-\mu}{\sigma}) = 0,0668 \\ \Pr(U < \frac{12-\mu}{\sigma}) = 1 - 0,1587 \end{cases}$$

En utilisant la table, on recherche x et y tel que

- $M(x, y) = 0,9332$ donc $x = 1,5$ et $y = 0$.
- $M(x, y) = 0,8413$ donc $x = 1$ $y = 0$.

On a donc
$$\begin{cases} \frac{2-\mu}{\sigma} = -1,5 \\ \frac{12-\mu}{\sigma} = 1 \end{cases}$$
Donc $\mu = 8$ et $\sigma = 4$. On veut que
$$\Pr(|X| < a + 3) = 0.95$$
Donc
$$\Pr(-a - 3 < X < a + 3) = 0,95$$
Par suite,après changement de variable
$$\Pr(\frac{-a - 11}{4} < U < \frac{a - 5}{4}) = 0,95$$
On a $a > 5$ car la borne supérieure doit être positive. On peut donc considérer que
$$\Pr(U < \frac{-a - 11}{4})$$
est négligeable car
$$\Pr(U < -4) < 1 - 0.99989.$$
On a donc
$$\Pr(U < \frac{a - 5}{4}) = 0,95.$$
En utilisant la table, on recherche x et y tel que $M[x, y] = 0.95$. On a $x = 1,6$ et $y = 0,05$. Donc
$$\frac{a - 5}{4} = 1.65$$
D'où $a = 11,6$.

Exercice 3

On doit avoir
$$\int_0^1 \int_0^y \frac{k}{\sqrt{xy}} dxdy = 1$$
$$2k \int_0^1 dy = 1$$
Donc k=1/2.

Si $x \leq 0$ et$y \leq 0$ alors $F_{X,Y}(x, y) = 0$. Si $x \geq 1$ et$y \geq 1$ alors $F_{X,Y}(x, y) = 1$. Soit $0 < x \leq y < 1$. On a
$$\mathrm{F_{X,Y}}(x, y) = \frac{1}{2} \int_0^x \int_t^y \frac{1}{\sqrt{ut}} du\mathrm{d}t$$
$$etdonc \mathrm{F_{X,Y}}(x, y) = 2\sqrt{xy} - x$$

Exercice 4

On a pour $n \geq 1$
$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{1}{2^{n+1-i}}$$

Montrons cette propriété par récurence. Si $n = 1$ alors

$$Y_1 = \frac{1}{2}(X_1 + Y_0) = \frac{1}{2}X_1$$

Supposons la propriété vrai au rang n alors

$$Y_{n+1} = \frac{1}{2}(X_{n+1} + Y_n) = \frac{1}{2}X_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{1}{2^{n+2-i}}$$

Donc

$$Y_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} X_i \frac{1}{2^{n+2-i}}$$

et la propriété est démontrée.

Par suite, la variable aléatoire Y_n est une combinaison linéaire de variables normales centrées d'écart type σ indépendantes donc cette variable suit une loi normale centrée de variance

$$V(Y_n) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) \frac{1}{2^{2(n+1-i)}}$$

$$V(Y_n) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{2i}}$$

$$V(Y_n) = \frac{1}{4}\sigma^2 \frac{1 - \frac{1}{4^n}}{1 - \frac{1}{4}}$$

Donc

$$V(Y_n) = \frac{1}{3}\sigma^2 (1 - \frac{1}{4^n})$$

$$\underset{n \to +\infty}{Lim} V(Y_n) = \frac{\sigma^2}{3}$$

Et par suite la loi de la suite Y_n a pour écart-type

$$\frac{\sigma}{\sqrt{3}}$$