# Corrigé du Devoir n° 1

## Exercice 1

L'espace de probabilité $\Omega$ est l'ensemble des choix possibles de 10 ampoules parmi 24.
On note $D$ l'évenement "les ampoules défectueuses sont toutes les deux sélectionnées".
Pour un évenement $A$, on note $|A|$ le *cardinal* de l'ensemble $A$.

Puisque l'on tire les ampoules au hasard, tous les choix d'ampoules sont équiprobables. On a donc, $P(D) = \frac{|D|}{|\Omega|}$.
Il existe $C_{24}^{10}$ facons de choisir 10 éléments parmi 24, donc $|\Omega| = C_{24}^{10}$.
Si les deux ampoules defecteuses sont choisies, il existe $C_{22}^{8}$ choix possibles pour les 8 autres ampoules. Par conséquent, $|D| = C_{22}^{8}$.
Finalament on obtient : $P(D) = \frac{C_{22}^{8}}{C_{24}^{10}}$.

## Exercice 2

Nous noterons $X$ la variable aléatoire représentant le gain effectué par le stand.

1. Soit $A$ l'évènement "la somme fait 7".
   $A = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$ et son cardinal vaut 6.
   Le cardinal de l'ensemble des valeurs possibles est $6^2$. Ainsi, la probabilité de l'évènement $A$ est $\frac{6}{6^2} = \frac{1}{6}$.
2. L'espérance de $X$ représente le gain en moyenne du stand. Pour le stand, les gains possibles sont $5 - k$ (le joueur gagne $k$ euros en jouant 5 euros) et 5 euros (le joueur ne gagne pas). La probabilité de gagner pour un joueur est de $\frac{1}{6}$, donc la probabilité de perdre est de $\frac{5}{6}$. Ainsi pour que la stand gagne en moyenne de l'argent, il faut :
   $E(X) > 0$
   $\frac{1}{6}.(5-k) + \frac{5}{6}.5 > 0$
   $k < 30$

   Pour que le stand gagne de l'argent en moyenne, il faut que $k$ reste inférieur à 30 euros.
3. Si $k = 25$ et qu'il y a 100 clients, nous notons le nombre de gagnants $z$. Que vaut $z$ pour qu'il y ait un gain de 100 euros ?
   $100 = (5-k) \times z + 5 \times (100 - z)$
   $25z = 400$
   $z = 16$

   Pour que le stand gagne 100 euros, il faut qu'il y ait 16 gagnants sur les 100 clients.
4. Soit la variable aléatoire $Y$ qui représente le nombre de gagnants au jeu des 2 dés. Cette variable aléatoire $Y$ suit une **loi binomiale** de paramètres 100 (nombre de clients) et $\frac{1}{6}$ (probabilité de gagner aux dés).
   Donc la probabilité que le stand gagne 100 euros est égale à la probabilité qu'il y ait 16 gagnants sur les 100 clients, c'est-à-dire :
   $P(Y = 16) = C_{100}^{16} \left(\frac{1}{6}\right)^{16} \left(\frac{5}{6}\right)^{84}$

## Exercice 3

Dans cet exercice on utilise les notations suivantes :

- ToT = "Le jeu est un TacOTac".
- M = "Le jeu est un Morpion".
- S = "Le jeu est un Solitaire".
- D = "Le jeu est un Dédé".

On notera l'événement $G =$ "le jeu est gagnant".

1. Par définition des probabilités conditionnelles, on a :
$$p(ToT \cap G) = p(G|ToT) \times p(ToT) = \frac{2}{100} \times \frac{4}{20} = \frac{1}{250}$$
$$p(M \cap G) = p(G|M) \times p(M) = \frac{7}{100} \times \frac{5}{20} = \frac{7}{400}$$
$$p(S \cap G) = p(G|S) \times p(S) = \frac{15}{1000} \times \frac{6}{20} = \frac{9}{2000}$$
$$p(D \cap G) = p(G|D) \times p(D) = \frac{4}{100} \times \frac{5}{20} = \frac{1}{100}$$

2. Calculons d'abord la probabilité qu'un jeux pris au hasard soit gagnant :
$$\begin{aligned} p(G) &= p(G \cap ToT) + p(G \cap M) + p(G \cap S) + p(G \cap D) \\ &= \frac{1}{250} + \frac{7}{400} + \frac{9}{2000} + \frac{1}{100} = \frac{8}{2000} + \frac{35}{2000} + \frac{9}{2000} + \frac{20}{2000} \\ &= \frac{72}{2000} = 0,036. \end{aligned}$$
Maintenant, on peut calculer toutes les probabilités grâce à la formule des probabilités conditionnelles :
$$p(ToT|G) = \frac{p(ToT \cap G)}{p(G)} = \frac{8}{2000} \times \frac{2000}{72} = \frac{1}{9} \approx 0,11.$$
$$p(M|G) = \frac{p(M \cap G)}{p(G)} = \frac{35}{2000} \times \frac{2000}{72} = \frac{35}{72} \approx 0,486.$$
$$p(S|G) = \frac{p(S \cap G)}{p(G)} = \frac{18}{2000} \times \frac{2000}{72} = \frac{9}{72} \approx 0,125.$$
$$p(D|G) = \frac{p(ToT \cap G)}{p(G)} = \frac{20}{2000} \times \frac{2000}{72} = \frac{20}{72} \approx 0,28.$$

## Exercice 4

1. Il faut utiliser la propriété : $\sum_{0 \leq i,j} P(X = i \cap Y = j) = P(\Omega) = 1.$

On calcule :
$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq i,j} P(X = i \cap Y = j) &= \sum_{0 \leq i,j} \frac{\alpha}{2^{i+j}} \\ &= \sum_{0 \leq i,j} \frac{\alpha}{2^{i+j}} \\ &= \alpha \sum_{0 \leq i,j} \left(\frac{1}{2}\right)^i \left(\frac{1}{2}\right)^j \\ &= \alpha \left(\sum_{0 \leq i} \left(\frac{1}{2}\right)^i\right) \left(\sum_{0 \leq j} \left(\frac{1}{2}\right)^j\right) \\ &= \alpha \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}}\right) \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}}\right) \\ &= 4\alpha. \end{aligned}$$
On a donc $4\alpha = 1$. D'où $\alpha = \frac{1}{4}$.

2. • On calcule la probabilité de l'évènement $(X = i)$.

$$\begin{aligned}
P(X=i) &= \sum_{0\leq j} P(X=i \cap Y=j) \\
&= \sum_{0\leq j} \frac{\alpha}{2^{i+j}} \\
&= \frac{\alpha}{2^i} \sum_{0\leq j} \left(\frac{1}{2}\right)^j \\
&= \frac{\alpha}{2^i} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right) \\
&= \frac{1}{2^{i+1}}.
\end{aligned}$$

• On calcule la fonction génératrice de $X$.

$$\begin{aligned}
G_X(z) &= \sum_{0\leq i} P(X=i) z^i \\
&= \sum_{0\leq i} \frac{z^i}{2^{i+1}} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{0\leq i} \left(\frac{z}{2}\right)^i \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-\frac{z}{2}}\right) \\
&= \frac{1}{2-z}.
\end{aligned}$$

• On cherche à calculer l'espérance et la variance de $X$. On se sert de la fonction génératrice.

On calcule la dérivée et la dérivée seconde de $G_X$.

$$\begin{aligned}
G'_X(z) &= \frac{1}{(2-z)^2}, \\
G''_X(z) &= \frac{2}{(2-z)^3}.
\end{aligned}$$

On évalue les dérivées en $z = 1$.

$$\begin{aligned}
G'_X(1) &= 1, \\
G''_X(1) &= 2.
\end{aligned}$$

On en déduit espérance et variance :

$$\begin{aligned}
E(X) &= G'_X(1) &&= 1, \\
V(X) &= G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2 &&= 2.
\end{aligned}$$

3. La probabilité de l'évenement $(Y = j)$ est $P(Y = j) = \dfrac{1}{2^{j+1}}$. (Même raisonnement que pour la question 4.2.)

On vérifie que :

$$P(X=i) \times P(Y=j) = \frac{1}{2^{i+1}}\frac{1}{2^{j+1}} = \frac{1}{4}\frac{1}{2^{i+j}} = P(X=i \cap Y=j).$$

Donc les variable $X$ et $Y$ sont indépendantes.

4. • On calcule la probabilité de l'évènement $(Z = k)$.

$$\begin{aligned}
P(Z=k) &= P(X=0 \cap Y=k) + P(X=1 \cap Y=k-1) + \cdots + P(X=k \cap Y=0) \\
&= \frac{\alpha}{2^k} + \frac{\alpha}{2^k} + \cdots + \frac{\alpha}{2^k} \\
&= \frac{\alpha(k+1)}{2^k} \\
&= \frac{(k+1)}{2^{k+2}}.
\end{aligned}$$

• On cherche la fonction génératrice de $Z = X + Y$. Comme les variables aléatoire $X$ et $Y$ sont indépendantes, on a $G_Z(z) = G_X(z) \times G_Y(z)$. Comme $X$ et $Y$ ont même distribution, $G_X(z) = G_Y(z)$.

On trouve donc $G_Z(z) = G_X(z)^2 = \dfrac{1}{(2-z)^2}$.

• Par la linéarité de l'espérance, on a $E(Z) = E(X) + E(Y)$. De plus, comme $X$ et $Y$ sont indépendantes, on a $V(Z) = V(X) + V(Y)$.

Comme $X$ et $Y$ ont même distribution, on a $E(X) = E(Y)$ et $V(X) = V(Y)$.

On en déduit l'espérance et la variance de $Z$ :

$E(Z) = 2E(X) = 2$,

$V(Z) = 2V(X) = 4$.