Devoir Surveillé n° 1

Préambule : Les documents sont autorisés.
Barème : exercice 1 : 3 points, exercice 2 : 5 points, exercice 3 : 5 points, exercice 4 : 7 points. Les quatre exercices sont indépendants. On veillera particulièrement à la concision et à la clarté de la rédaction.

Exercice 1

Une boîte contient 24 ampoules. Parmi celles-ci, deux sont défectueuses. Une personne en prend 10 au hasard. Quelle est la probabilité que les ampoules défectueuses soient toutes les deux sélectionnées ?

Exercice 2

Un stand de foire propose un jeu d'argent : le joueur paye 5 euros et lance 2 dés. Le joueur gagne k euros si la somme des deux dés fait 7.

1. Déterminer la valeur minimale de k pour laquelle le stand est rentable (c'est-à-dire ne perd pas d'argent en moyenne).
2. On suppose $k = 25$ euros. Déterminer la probabilité pour que le propriétaire du stand gagne exactement 100 euros si 100 clients viennent jouer une même journée.

Exercice 3

La chance de gagner sur chacun des jeux suivants de la Française des jeux est : 2 % pour les "TacOTac", 4 % pour les "Dédé", 1,5 % pour les "Solitaire" et 7 % pour les "Morpion".
Un habitué des jeux à gratter tente sa chance. Il achète 5 "Morpions", 4 "TacOTac", 6 "Solitaire" et 5 "Dédé".

1. Il choisit un des jeux achetés au hasard. Calculer les probabilités :
   que le jeu choisi soit un TacOTac gagnant.
   que le jeu choisi soit un Dédé gagnant.
   que le jeu choisi soit un Solitaire gagnant.
   que le jeu choisi soit un Morpion gagnant.
2. Sachant que le jeu choisi est gagnant, calculer les probabilités pour que ce jeu soit :
   un TacOTac,
   un Dédé,
   un Morpion,
   un Solitaire.

Exercice 4

Un processus produit deux nombres entiers (positifs ou nuls) aléatoires. Soit X et Y les variables aléatoires correspondants au premier et au deuxième nombre. La probabilité de l'évènement $(X = i \cap Y = j)$ est $P(X = i \cap Y = j) = \frac{\alpha}{2^{i+j}}$.

1. Quelle est la valeur de la constante α ?
2. Quelle est la probabilité de l'évènement $(X = i)$? Quelle est la fonction génératrice G_X de la variable aléatoire X ? Calculer l'espérance et la variance de X.
3. Quelle est la probabilité de l'évènement $(Y = j)$? Les variables X et Y sont elles indépendantes ?
4. On pose $Z = X + Y$. Quelle est la probabilité de l'évènement $(Z = k)$? Quelle est la fonction génératrice G_Z de la variable aléatoire Z ? On donnera une expression simple (ne faisant pas intervenir de somme) de cette fonction. Calculez l'espérance et la variance de Z.