Solution TD1 exercice 7

1 – On doit avoir

$$Pr(\Omega) = 1$$

donc

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{i=0}^{N} \frac{\alpha}{(i+1)(i+2)} = 1$$

Or

$$\sum_{i=0}^{N} \frac{\alpha}{(i+1)(i+2)} = \alpha \sum_{i=0}^{N} \left(\frac{1}{i+1} - \frac{1}{i+2} \right)$$

donc

$$\sum_{i=0}^{N} \frac{\alpha}{(i+1)(i+2)} = \alpha \left(1 - \frac{1}{N+2} \right)$$

Donc on doit avoir $\alpha=1$

2 – On a

$$E(X) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{i=0}^{N} \frac{i}{(i+1)(i+2)}$$

Donc

$$E(X) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{i=0}^{N} \left(\frac{1}{(i+2)} - \frac{1}{(i+1)(i+2)} \right)$$

On a

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{i=0}^{N} \frac{1}{(i+1)(i+2)} = 1$$

et

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{i=0}^{N} \left(\frac{1}{(i+2)} \right) = +\infty$$

en effet

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{i=0}^{N} \frac{1}{i} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^{K} \sum_{j=1}^{2^{k-1}} \frac{1}{2^{k-1}+j}$$

et

$$\sum_{j=1}^{2^{k-1}} \frac{1}{2^{k-1}+j} > \frac{1}{2}$$

donc

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{i=0}^{N} \frac{1}{i} > \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{2}$$

Donc X n’a pas d’espérance.