TD n° 1 : Espaces probabilisés, espérance mathématique, variance.

Exercice 1

Dans une fabrique de processeurs, on prélève toutes les heures les trois derniers processeurs produits. Ceux-ci sont classés dans deux catégories : fonctionnel, codé 1 et défectueux, codé 0.

- Décrivez l'espace Ω associé à cette expérience aléatoire,
- écrivez les évènements suivants : A=« le premier processeur est défectueux » ; B=« le dernier est fonctionnel » ; C=« deux processeurs sont défectueux » ; D=« au moins deux processeurs sont fonctionnels ».

Exercice 2

Le problème du *chevalier de Méré*

Lequel de ces deux événements est le plus probable :

- « Obtenir au moins une fois un *six* en quatre lancers de dés »,
- « Obtenir au moins un double *six* en vingt quatre lancers de deux dés ».

Exercice 3

Une urne contient 8 boules blanches et 6 boules noires, chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée. On tire simultanément 5 boules. Quelle est la probabilité d'obtenir :

- 3 blanches et 2 noires ?
- des boules de couleurs différentes ?

On tire successivement 5 boules avec remise de chaque boule tirée. Quelle est la probabilité d'avoir :

- 3 blanches puis 2 noires ?
- 3 blanches et 2 noires dans un ordre quelconque ?

Exercice 4

Jeu de dé

On considère le jeu qui consiste à lancer simultanément 2 dés. À cette expérience, on associe la variable aléatoire X qui correspond à la somme des valeurs indiquées par les dés.

- Calculez l'espérance mathématique $E(X)$ pour une partie, puis pour n parties.
- De même, calculez la variance pour une partie, puis pour n parties.

Exercice 5

Casino

Au casino, une machine à sous fonctionne de la manière suivante : on introduit une pièce de 2 euros et trois roues tournent ; chaque roue s'arrête sur un chiffre de 0 à 9 aléatoirement. Si les trois chiffres sont différents, le joueur perd sa mise, s'il y a un « double », celui-ci gagne 4 euros et enfin s'il obtient un « triple », il gagne x euros.

- Calculez l'espérance mathématique, en fonction de x, du gain pour le joueur. De même calculez la variance.
- En déduire la valeur limite de x pour laquelle le jeu est favorable à la banque.

Exercice 6

Pile ou face ?

On considère le jeu de « pile ou face », décrit par l'espace probabilisé suivant : $\Omega = \{P, F\}$ (la pièce tombe sur pile ou sur face), chaque événement atomique étant équiprobable.

- On itère le jeu $2n$ fois (l'espace probabilisé devient donc Ω^{2n}). Quelle est la probabilité « d'obtenir autant de piles que de faces » ?
- On considère la variable aléatoire X égale au nombre d'occurrences de la séquence $\underbrace{PP\ldots P}_{k}$.

  Quelle est l'espérance de la variable aléatoire X. (On pourra écrire X comme une somme de variables aléatoires).

Exercice 7

On considère la fonction suivante : $P_r(n) = \frac{\alpha}{(n+1)(n+2)}$.

- Pour quelle valeur de α cette fonction est une loi de probabilité ?
- Calculez son espérance.