TD n° 2 : Indépendance, séries génératrices, distributions classiques.

Exercice 1

Indépendance

a) Soit A et B deux événements indépendants sur un espace de probabilité Ω. On note $\overline{A}$ et $\overline{B}$ leur complémentaires respectifs.
Montrez que les événement $\overline{A}$ et B sont indépendants. De même montrez que $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.
b) On considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes sur l'espace Ω.

- Montrez que $E(XY) = E(X)E(Y)$.
- Montrez que pour deux ensembles quelconques $E = \{x_1, \ldots, x_k\}$, $F = \{y_1, \ldots, y_l\}$ on a l'égalité

$$P_r(X \in E,\ Y \in F) \ = \ P_r(X \in E)P_r(Y \in F) \ .$$

  En déduire la probabilité de l'événement « $X \in E$ ou $Y \in F$ ».
- Montrez que si f est une fonction quelconque et que l'on note $Z = f(Y)$ alors les variables aléatoire X et Z sont indépendantes.

Exercice 2

Pile ou face - suite

On tire à « pile ou face » $2n$ fois de suite. On décrit cette expérience par l'espace de probabilité $\Omega = \{P, F\}^{2n}$ et on suppose que chaque événement atomique est équiprobable. On considère les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_{2n}$ défini par : $X_i(w) = 1$ si on obtient « pile » au $i^{\text{ème}}$ lancer et $X_i(w) = 0$ sinon.

- Quelle est la fonction génératrice de la variable X_i ? En déduire son espérance, sa variance.
- Soit la variable aléatoire $S = \sum_{i=1}^{2n} X_i$. Calculez la fonction génératrice de S. Quel est le coefficient de z^n dans cette série ? En déduire la probabilité « d'obtenir autant de piles que de faces ». Calculez l'espérance de S et sa variance.

Exercice 3

Jeu de dé - suite

a) On considère le jeu qui consiste à lancer un dé (à six faces) et on suppose tous les résultats équiprobables. À cette expérience, on associe la variable aléatoire X qui correspond au score.

- Calculez la série génératrice de X. En déduire la valeur de l'espérance et de la variance de X.
- On pose $Y = 2X$. Quelle est la fonction génératrice de Y ?
- On pose $Z = X + 3$. Quelle est la fonction génératrice de Z ?

b) On considère le jeu qui consiste à lancer deux dés et on suppose tous les résultats équiprobables. À cette expérience, on associe la variable aléatoire S qui correspond à la somme des deux dés et la variable aléatoire T qui correspond au produit.

- Calculez l'espérance de T. Comparez cette valeur à l'espérance de X^2.
- Calculez la série génératrice de S. Comparez ce résultat à la série génératrice de Y.

Exercice 4

Soit l'espace de probabilité $\Omega = \{0, 1, \ldots, n\}$.
a) On considère la distribution de probabilité $P_r :\ k \mapsto \alpha \cdot C_n^k$.

- Quelle est la valeur de α ?
- Quelle est la série génératrice de cette distribution (i.e. la fonction génératrice de la variable aléatoire identité) ? Quelle est son espérance ?

b) On considère, à présent, la distribution de probabilité $P_r :\ k \mapsto \beta \cdot kC_n^k$.

- Quelle est la valeur de β ?
- Quelle est la série génératrice de cette distribution ? Quelle est son espérance ?

Exercice 5

Analyse d'algorithme

On se propose d'analyser la complexité moyenne (aussi appelée « complexité amortie ») d'un algorithme.

On considère l'algorithme ci-dessous pour trouver le plus grand élément dans une liste non vide L de n entiers :

début

(1) $M := L[1]$;

(2) **pour** $j := 2$ **à** n **faire**

(3) **si** $L[j] > M$ **alors** $M := L[j]$

fin

- Quel est le nombre de comparaisons effectuées (ligne 3) ?
- Quel est le nombre d'affectations (lignes 1 et 3) dans le cas le plus favorable ? le plus défavorable ?

Dans la suite, on suppose que les éléments de de la liste sont deux-à-deux distincts et que tous les $n!$ permutations possibles ont la même probabilité d'apparaître dans la liste. Soit $p(n,k)$ la probabilité pour que, dans l'application de l'algorithme à une liste (aléatoire) L de taille n, k affectations soient nécessaires.

- Montrez la récurrence suivante :

$$p(n,k) = \frac{1}{n}p(n-1,k-1) + \frac{n-1}{n}p(n-1,k), \text{ pour } n \geq 2 \text{ et } 1 \leq k \leq n.$$

  (On peut considérer deux cas suivant que le $n^{\text{ème}}$ élément est maximal ou non.)
- Soit, par ailleurs, $G_n(z) = \sum_{1 \leq k \leq n} p(n,k)z^k$ la fonction génératrice de de la distribution des probabilités $p(n,k)$. Déduire de la récurrence ci-dessus une récurrence sur G_n et donner une expression simple pour G_n.
- Trouvez le nombre moyen d'affectations, i.e. $\sum_{1 \leq k \leq n} kp(n,k)$. Quel est son ordre de grandeur lorsque $n \to \infty$?