Solution TD4 exercice 7

1 - On a

$$\forall t,n \in N, p_t(n) = P(T = t+n / T \geq t)$$

or

$$P(T = t+n / T \geq t) = \frac{P(T = t+n \cap T \geq t)}{P(T \geq t)}$$

de plus

$$P(T = t+n \cap T \geq t) = P(T = t+n)$$

et

$$p_t(n) = p(n)$$

donc

$$\forall t,n \in N, p(n)\pi(t) = p(t+n)$$

Par suite

$$\forall t,n \in N, p(t)\pi(n) = p(t+n)$$

$$\forall t,m \in N, p(t+n)\pi(m) = p(t+n+m)$$

donc

$$\pi(n)\pi(m) = \frac{p(t+n+m)}{p(t)}$$

et on a bien

$$\pi(n)\pi(m) = \pi(n+m)$$

2 - Posons

$$\pi(1) = q$$

Alors

$$\pi(n) = q^n$$

Montrons cette propriété par récurrence. Pour n=1, la propriété est vrai par définition. Supposons qu'elle est vraie au rang n et montrons qu'elle est vraie au rang n+1.

$$\pi(n+1) = \pi(n)\pi(1) = q^n q = q^{n+1}$$

3 – On a

$$p(t) = pr(T \geq t) - Pr(T \geq t+1)$$

donc

$$p(t) = \pi(t) - \pi(t+1) = q^t - q^{t+1} = q^t(1-q)$$