TD n° 4 : Probabilités conditionelles

Exercice 1

On a 3 cartes coloriées sur chaque face : rouge-rouge (RR), blanc-blanc (BB) et rouge-blanc (RB). Une personne tire une carte au hasard et vous en montre une face tirée au hasard aussi. Si la face montrée est R, que pariez vous pour la couleur de la face cachée ?

Exercice 2

Soient X une v.a. géométrique de paramètre p et Y une v.a de Poisson de paramètres λ. On suppose que X et Y sont indépendantes.

Calculer, quand elle existe , l'espérance de $Z = X^Y$.

Exercice 3

Soient $n, m \geq 0$, avec $m \geq n$. On note $C(m,n)$ l'ensemble des mots u de $\{A,B\}^*$ tels que $|u|_A = m$ et $|u|_B = n$, ie u est constitué de m lettres A et de n lettres B.

Soit $p : \{A,B\}^* \to \mathbb{Z}$ l'application définie par $p(u) = |u|_A - |u|_B$

On propose de calculer la probabilité de l'événement

$$D = \{u \in C(m,n) |\ \forall v \neq \varepsilon \text{ préfixe de } u,\ p(v) > 0\}.$$

- Soit $C_B(m,n)$ l'ensemble des mots de $C(m,n)$ començant par B.
  Décrire l'événement $E = C(m,n) - D$ et montrer que $P(E) = 2P(C_B(m,n))$
- En déduire la probabilité de D.

Application : Lors d'une élection, deux candidat A et B ont obtenu respectivement m et n voix. C'est le candidat A qui gagne l'élection : $m > n$. Quelle est la probabilité pour que A garde constamment la majorité lors du dépouillement ?

Exercice 4

Soient m et n deux entiers. Posons $\Omega_1 = 1,\ldots,m$, $\Omega_2 = 1,\ldots,n$ et $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$. On muni Ω de la loi uniforme et on définit les v.a. X_1 et X_2 par $X_1(\omega_1,\omega_2) = \omega_1$ et $X_2(\omega_1,\omega_2) = \omega_2$, pour tout $(\omega_1,\omega_2) \in \Omega$.

Montrer que X_1 et X_2 sont indépendantes.

Exercice 5

Soit la probabilité définie sur $\mathbb{N}^2$ par

$$P(m,n) = \frac{C}{(m+n+1)!}$$

- Pour tout $k \geq 0$, on note C_k le nombre de couples $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ tels que $m + n = k$.
  - Montrer que $\displaystyle\sum_{m,n\geq 0} P(m,n) = \sum_{k\geq 0} \frac{C_k}{(k+1)!}$.
  - En déduire la valeur de C
- On pose $X(m,n) = m$ et $Y(m,n) = n$, $\forall n,\ m \in \mathbb{N}$. Les v.a. X et Y sont-elles indépendantes.

Exercice 6

Deux bus passent au même arrêt toutes les trentes minutes : Le second passe toujours 20 minutes après le premier.

Un usager arrive à l'arrêt à l'instant t. Combien de temps en moyenne va t'il attendre l'arrivée du prochain bus.

Les exercices qui suivent ne seront pas forcément traités en TD.

Exercice 7

Soit T une v.a. à valeur dans $\mathbb{N}$ de loi $P(T = n) = p(n)$.

On pose $p_t(n) = P(T - t = n | T \geq t)$, $n \in \mathbb{N}$.
On suppose que

$$\forall t,\, n \in \mathbb{N},\ p_t(n) = p(n)$$

.

On veut montrer qu'alors il existe $q \in [0, 1]$ tel que $P(T = n) = q^n(1 - q)$.
Soit $\pi(n) = P(T \geq n)$, $n \geq 0$.

1. Montrer que
   $\forall m,\, n \in \mathbb{N},\ \pi(n + m) = \pi(n)\pi(m)$.
   On pourra remarquer que $p_t(n)P(T \geq t) = P(T = n + t)$ pour $t, n \geq 0$.
2. En déduire une expression de $\pi(n)$ en fonction de $\pi(1) = q$.
3. Trouver une relation liant $\forall t \geq 0$, $p(t)$ avec $\pi(t)$ et $\pi(t + 1)$, puis calculer $p(t)$, $\forall t \geq 0$.