Solution TD5 exercice 7

1 - On doit avoir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{1+x^2} = 1$$

donc

$$a\left[arctg(x)\right]_{-\infty}^{+\infty} = 1$$

D'où

$$a = \frac{1}{\pi}$$

2 -

$$P(X \geq 1) = \frac{1}{\pi}\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{\pi}\left[arctg(x)\right]_{1}^{+\infty} = \frac{1}{4}$$

3 –

$$E(X) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}$$

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{2\pi}\left[\log(1+x^2)\right]_{0}^{+\infty} = +\infty$$

Par suite, X n'a pas d'espérance et de même pas de variance.

Attention. Si g(x) est une primitive d'une fonction f(x) et a>0 est fini alors

- $\left[g(x)\right]_{-a}^{a} = 0$ si $g(x)$ est paire
- $\left[g(x)\right]_{-a}^{a} = 2g(a)$ si $g(x)$ est impaire

Cette propriété ne s'applique que si a est fini.

4 – La fonction de répartition de x est

$$F_X(a) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{a} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}arctg(a)$$

On a

$$F_Y(a) = Pr(Y < a) = pr(|X| < a)$$

Donc

$$F_Y(a) = F_X(a) - F_X(-a) = \frac{2}{\pi}arctg(a)$$

Par suite

$$\int_{-\infty}^{a} f_Y(x) = \frac{2}{\pi}arctg(a)$$

On a donc

$$f_Y(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi(1+x^2)} \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$