TD n° 5 : Tribus - Probabilités continues

Exercice 1

Soit $\mathfrak{F}$ une tribu sur Ω. Montrer que

1. $\emptyset \in \mathfrak{F}$
2. si $\mathfrak{I}$ est un ensemble au plus dénombrable et si $\{A_i : i \in \mathfrak{I}\} \subseteq \mathfrak{F}$ est une collection de membres de $\mathfrak{F}$, alors $\bigcap_{i \in \mathfrak{I}} A_i \in \mathfrak{F}$

Exercice 2

Si $\mathfrak{F}_i$ une tribu sur Ω pour tout $i \in I$, où I est un ensemble quelconque.

Montrer que $\mathfrak{G} = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ est une tribu.

Exercice 3

Soit $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$ l'espace des issues d'un lancé de dé. Quelle est la tribu engendrée par $\mathcal{C} = \{\{1,2,3\},\{4,5\}\}$?

Exercice 4

Soit $\mathcal{C} = \{A_i : i \in \mathcal{I}\}$ une classe de parties de Ω au plus dénombrable et telle que ses éléments forment une partition de Ω, c'est à dire

$$\Omega = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i \text{ et } A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j.$$

Décrire la tribu $\sigma(\mathcal{C})$ engendrée par $\mathcal{C}$.

Exercice 5

Soit $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ un espace de probabilité et $B \in \mathfrak{F}$ tel que $P(B) > 0$.
On définit Q sur $\mathfrak{F}$ par $Q(A) = P(A|B)$.

Montrer que Q est une probabilité.

Exercice 6

La densité f de la variable aléatoire X est donnée par :

$$\begin{cases} ax \text{ si } 0 \leq x < 1 \\ a \text{ si } 1 \leq x < 3 \\ -ax + 4a \text{ si } 3 \leq x < 4 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1. Représenter graphiquement f et calculer la constante a.
2. Calculer $P(|X - 1,5| \leq 1)$ et $P(X \geq 3)$.

Exercice 7

La densité f de la variable aléatoire X est donnée par

$$f(x) = \frac{a}{x^2 + 1}.$$

On rappelle que $(arctan(x))' = \frac{1}{x^2+1}$.

1. Calculer a.
2. Calculer $P(X \geq 1)$
3. Calculer l'espérance et la variance de X

4. Quelle est la densité de la variable aléatoire $Y = |X|$? (On pourra introduire la fonction de repartition de Y).

Exercice 8

Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies par :

$$\begin{aligned} p_n(x) &= 0 \text{ si } |x| > n + \frac{1}{n} \\ p_n(x) &= 0 \text{ si } \frac{1}{n} < |x| < n \\ p_n(x) &= \sqrt{n} \text{ si } n \leq |x| \leq n + \frac{1}{n} \\ p_n(x) &= \frac{n}{2} - \sqrt{n} \text{ sinon.} \end{aligned}$$

1. Vérifier que les p_n sont des densités de probabilité.
2. Soit X_n une variable aléatoire réelle associée à la densité p_n.
3. Calculer l'espérance et la variance de la variable X_n pour tout $n \geq 0$ Montrer que la suite de v.a. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers 0.

Les exercices suivants ne seront pas nécessairemant traités en TD.

Exercice 9

Soit $\mathcal{B}_k$ la tribu des boréliens de $\mathbb{R}^k$. On rappelle que $\mathcal{B}_k$ est la tribu engendrée par la classe des pavés de $\mathbb{R}^k$.

Montrer dans chacun des cas suivants que la classe $\mathcal{C}$ engendre également la tribu $\mathcal{B}_k$

1. si $k = 1$ et $\mathcal{C}$ est la classe des intervalles fermés de $\mathbb{R}$:
   $\mathcal{C} = \{[a, b] : \ a, b \in \mathbb{R}, \ a < b\}$
2. si $k = 1$ et $\mathcal{C} = \{] - \infty, x) : \ x \in \mathbb{R}\}$
3. si $k \geq 2$ et $\mathcal{C} = \{[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_k, b_k] : \ ai_, b_i \in \mathbb{R}, \ a_i < b_i, \ i = 1, \ldots, k\}$
4. si $k \geq 2$ et $\mathcal{C} = \{] - \infty, b_1] \times \ldots \times] - \infty, b_k] : \ b_i \in \mathbb{R}, \ i = 1, \ldots, k\}$