TD n° 6- Exercice 3

1. $\forall n \geq 0$,
   $[X] = n$ ssi $n \leq X < n+1$, donc $P(Y=n) = P(n \leq X < n+1) = \int_n^{n+1} f(t)dt$.
   D'oÃ¹ $f_Y(n) = f_X(n+1) - f_X(n)$.
   On pose maintenant $Z = X - Y$.
   On a $\forall x \in [0,1[$,
   $Z \leq x$ ssi $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $n \leq X \leq x+n$ d'où
   si $x \in [0,1[$, $F_Z(x) = P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{n \leq X \leq n+x\}) = \sum_{n\geq 0} \int_n^{n+x} f(t)dt$,
   si $x \geq 1$, $F_Z(x) = 1$.

2. On a :
   $E(Y) = \sum_{n\geq 0} n \int_n^{n+1} f(t)dt$ et $E(X) = \int_0^\infty tf(t)dt = \sum_{n\geq 0} \int_n^{n+1} tf(t)dt$,
   or, pour tout $t \in [n, n+1[$, $n \geq 0$,
   $$nf(t) \leq tf(t) < (n+1)f(t)$$
   alors :
   $\sum_{n\geq 0} \int_n^{n+1} nf(t)dt \leq E(X) < \sum_{n\geq 0} \int_n^{n+1} (n+1)f(t)dt$
   c'est à dire
   $E(Y) \leq E(X) < E(Y) + 1$
   Alors $E(Y)$ converge ssi $E(X)$ converge.
3. Si X suit une loi exponentielle de paramètre λ alors
   $$E(X) = \lambda^{-1}$$
   Par ailleurs
   $$E(Y) = \sum_{n\geq 0} n \int_n^{n+1} f(t)dt$$
   donc
   $$E(Y) = \sum_{n\geq 0} n \int_n^{n+1} \lambda e^{-\lambda t} dt$$
   $$E(Y) = \sum_{n\geq 0} n(e^{-n\lambda} - e^{-(n+1)\lambda}$$
   $$E(Y) = (1 - e^{-\lambda}) \sum_{n\geq 0} n\ e^{-n\lambda}$$
   Or
   $$\sum_{n\geq 0} n\ e^{n\lambda} \frac{e^{\lambda}}{(-1+e^{\lambda})^2}$$
   Donc
   $$E(Y) = -\frac{e^{-\lambda}}{-1+e^{-\lambda}}$$

et par suite

$$E(Z) = E(X) - E(Y) = \lambda^{-1} + \frac{e^{-\lambda}}{-1 + e^{-\lambda}}.$$