# TD n° 6 : Probabilités continues

## Exercice 1

Soit $X$ une v.a.r admettant une densité $f$ et $a > 0$. Montrer que $Y = aX$ admet pour densité $g(x) = \frac{1}{a} f(\frac{x}{a})$.

## Exercice 2

Comme chacun sait, la durée de vie d'une savonette (en jours) est une v.a.r $T$ dont la loi admet une densité

$f(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t} \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t)$.

Une longue expérience indique que la moyenne $E(T)$ est de 20 jours.

1. Calculer le paramètre $\lambda$ ainsi que la fonction de répartition de $T$
2. Calculer la probabilité que la savonette dure plus de 30 jours sachant qu'elle est toujours là au bout de 10 jours.

## Exercice 3

Soit $X$ une variable aléatoire continue, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, de densité $f$.

Soit Y=[X] la partir entière de X.

1. Présicer la loi de $Y$ et la fonction de répartition de $Z = X - Y$.
2. Montrer que $Y$ admet une espérance si et seulement si il en est de même pour $X$.
3. On suppose que $X$ suit une loi exponentielle, de paramètre $\lambda$. Calculer dans ce cas l'espérance de $Z$.

## Exercice 4

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. indépendantes et de même loi. On pose $Z_n = Max(X_1, \ldots X_n)$ et $W_n = Min(X_1, \ldots, X_n)$.

1. Calculer la fonction de repartition de $Z_n$ en fonction de celles de $X_n$.
2. Même question pour $W_n$.
3. On suppose que $X_n$ suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda$ pour tout $n$. Quelle est la loi de $W_n$ ?

## Exercice 5

Si $X$ suit une loi uniforme sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, quelle est la loi de $Y = sinX$.

## Exercice 6

Soient $X_1, \ldots X_n$ des v.a. réelles positives et i.i.d. On note $T_n(t)$ le nombre de $X_i$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ qui prennent une valeur superieur ou égale à $t$. Pour $k$ entier, calculer $P(T_n(t) = k)$ en fonction de la fonction de repartition des $X_1, \ldots, X_n$

## Exercice 7

On désigne par $F_{m,\sigma}$ la fonction de repartition d'une v.a. suivant une loi normanale $N(m, \sigma)$.

Exprimer $F_{m,\sigma}$ en fonction de $F_{0,\sigma}$ et $F_{0,\sigma}$ en fonction de $F_{0,1}$.

En déduire une expression de $F_{m,\sigma}$ en fonction de $F_{0,1}$.

## Exercice 8

Soit une population dont la taille suit la loi normale $N(m, \sigma)$ quand l'unité utilisée est le mètre.

Quelle est la loi suivi par la taille de cette population quand l'unité est le décimètre.

## Exercice 9

[Aiguille de Buffon] On lance au hasard une aiguille de longueur 1 au hasard sur un parquet dont les lames sont parallèles, la largeur d'une lame valant 1.

Quelle est la probabilité que l'aiguille chevauche une lame de parquet ?