TD n° 7 - Exercice 9

On suppose que la durée de vie d'une ampoule électrique est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,2 * 10^{-3} h^{-1}$.
Si l'on remplace une ampoule par une ampoule semblable dès qu'elle ne fonctionne plus, qu'elle est la probabilité qu'au bout de 50 000 *heures l'ampoule en fonctionnement soit au moins la dixième ?*

Réponse : Chaque ampoule a une durée de vie X_i suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,2 * 10^{-3}$, et admet donc pour espérance $m = \frac{1}{\lambda}$ et pour écart-type $\sigma = \frac{1}{\lambda}$.

On approxime donc $\sqrt{n}\lambda(\frac{S_n}{n} - \frac{1}{\lambda})$ par $N_{0,1}$ (avec $S_n = \sum_{i=0}^{n} X_i$).

La probabilité qu'au bout de 50000 heures, l'ampoule soit au moins la dizième est $P(S_9 < 50000)$. En utilisant l'approximation :

$P(S_9 < 50000) = P(N_{0,1} < 0.6.10^{-3}(\frac{50\times10^3}{9} - \frac{1}{0,2\times10^{-3}})) = P(N_{0,1} < \frac{1}{3}) = 0.6293$