TD n° 7 - Exercice 2

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale de parametres m et σ. On pose $Y = e^X$, calculer l'espérance et la variance de Y.

Réponse : $E(Y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} e^x \times e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}+x}dx$
Or,

$$\begin{aligned}
\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} - x &= \frac{1}{2\sigma^2}[x^2 - 2x(m+\sigma^2) + m^2] \\
&= \frac{1}{2\sigma^2}[(x-(m+\sigma^2))^2 + m^2 - (m+\sigma^2)^2] \\
&= \frac{1}{2\sigma^2}[(x-(m+\sigma^2))^2 - 2m\sigma - \sigma^4]
\end{aligned}$$

D'où : $E(Y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{2m\sigma^2+\sigma^4}{2\sigma^2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-(m+\sigma^2))^2}{2\sigma^2}}dx = e^{m+\frac{\sigma^2}{2}}$
(car $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-(m+\sigma^2))^2}{2\sigma^2}}dx = P(\mathcal{N}(m+\sigma^2,\sigma) \in \mathbb{R}) = 1$)

On calcule maintenant la variance, pour cela, on calcule d'abord la valeur de $E(Y^2)$:

$E(Y^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2x} \times e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}+2x}dx$
Or,

$$\begin{aligned}
\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} - 2x &= \frac{1}{2\sigma^2}[x^2 - 2x(m+2\sigma^2) + m^2] \\
&= \frac{1}{2\sigma^2}[(x-(m+2\sigma^2))^2 + m^2 - (m+2\sigma^2)^2] \\
&= \frac{1}{2\sigma^2}[(x-(m+2\sigma^2))^2 - (4m\sigma^2 + 4\sigma^4)] \\
&= \frac{(x-(m+2\sigma^2))^2}{2\sigma^2} - (2m+2\sigma^2)
\end{aligned}$$

D'où : $E(Y^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{2m+2\sigma^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-(m+2\sigma^2))^2}{2\sigma^2}}dx = e^{2m+2\sigma^2}$
Alors, $V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = e^{2m+2\sigma^2} - e^{2m+\sigma^2} = e^{2m+\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$