TD n° 7 - Exercice 9

Un restaurant peut servir 75 repas.
La pratique montre que 20 % des clients ayant réservé ne viennent pas.

1. *Le restaurateur accepte 90 réservations.*
   Quelle est la probabilité qu'il se présente plus de 50 clients.

   Réponse : On définit pour tout $i \geq 1$, la v.a. $X_i =$"le client i vient ". Chaque X_i suit une loi de Bernouilli de paramètre $p = 0.8$ (car par hypothèse, $P(X_i = 0) = 0.2$) et admet donc $m = 0,8$ pour espérance et $\sigma = 0.4$ pour écart-type.

   On pose $S_{90} = \sum_{i=1}^{90} X_i$. La probabilité qu'il se présente plus de 50 clients sur 90 réservations est alors $P(S_{90} \geq 50)$.

   Pour faire le calcul, on approxime $\frac{\sqrt{90}}{\sigma}(\frac{S_{90}}{90} - m)$ par $N_{0,1}$.

   On a donc $P(S_{90} \geq 50) = P(N_{0,1} \geq \frac{30\sqrt{10}}{4}(\frac{5}{9} - 0.8)) = P(N_{0,1} \geq -5.7975) = 1$

2. *Combien le restaurateur doit-il accepter de réservations pour avoir une probabilité supérieure ou égale à 0,9 de pouvoir servir tous les clients qui se présenteront ?*

   Réponse : On cherche n tel que $P(S_n \leq 75) = 0.9$, ie tel que $P(N_{0,1} \leq \frac{10\sqrt{n}}{4}(\frac{75}{n} - 0.8)) = 0.9$
   En cherchant dans la table on voit que n doit vérifier :

   $$\frac{10\sqrt{n}}{4}(\frac{75}{n} - 0.8) \geq 1.281,$$

   c'est à dire $75 - 0.8n \geq 1.281 \times 0.4\sqrt{n}$ ce qui conduit en élevant au carré à résoudre l'inéquation du second degrès suivante :

   $$0.64n^2 - 120.263n + 5625 \geq 0.$$

   On trouve deux racines dont la plus petite est 87.75 (la plus grande n'a pas à être retenue puisqu'elle correspond à $75 - 0.8n \leq -1.281\sqrt{0.16n}$ n'est pas retenue).
   Conclusion : à partir d'environ 88 réservations, le restaurateur sera sûr à 90 chances sur 100 au moins de remplir son restaurant.