TD n° 7 : Loi normale, convergences

Exercice 1

Lors de la fabrication en série de billes, on admet que le diamètre est reparti suivant une loi normale. A l'aide de deux cribles, l'un avec des trous de 10 mm et l'autre avec des trous de 10.3 mm, on peut evaluer les probabilités suivantes :

$P(X \geq 10) = 0.1736$ et $P(X \geq 13) = 0.1446$.

Déterminer les paramètres λ et σ de la loi de distribution de X.

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale de parametres m et σ. On pose $Y = e^X$, calculer l'espérance et la variance de Y

Exercice 3

Un pays compte 1004000 électeurs. Le vote est obligatoire. 4000 électeurs votent "OUI" par conviction, les autres votent au hasard entre "OUI" et "NON". Quelle est la probabilité que le " OUI" l'emporte ?

Exercice 4

On suppose que les erreurs liées à une expérience suivent la loi normale de moyenne nulle et d'écart-type σ.

1. Déterminer σ sachant que l'erreur (en valeur absolue) est supérieure à 0,1 dans 10% des cas ?
2. Dans ce cas, quelle est la probabilité pour que l'erreur soit supérieure à 0,2 ?
3. Toujours dans le même cas, déterminer a en sorte que la probabilité pour que l'erreur soit supérieure à a soit de 5%.

Exercice 5

Une usine fabrique des objets dont on sait que 4% présentent des défauts. Calculer la probabilitéP_k qu'un lot de 35 objets (choisis au hasard) comprenne k objets défectueux, pour $k = 1, 2, 3$.
Refaire les calculs en remplaçant la loi exacte par son approximation de Poisson.

Exercice 6

On suppose que la température moyenne du mois de janvier à Bordeaux est une variable aléatoire normale, d'espérance 3,7°C et d'écart-type 1,8°C. On suppose que les températures moyennes (du mois de janvier à Bordeaux) des différentes années sont des variables aléatoires indépendantes.

1. Quelle est la loi de la moyenne des températures moyennes sur 5 années consécutives ?
   Quelle est la probabilité que cette moyenne sur 5 ans dépasse 5°C.
2. Quelle est la probabilité que, 5 années consécutives, la température moyenne de janvier dépasse 5°C ?

Exercice 7

On suppose qu'avec une certaine balance de laboratoire, l'erreur (en g) sur la pesée d'un corps est une variale aléatoire suivant la loi normale de paramètres 0 et $0,08$. Soit X la variable aléatoire égale au résultat de la pesée d'un corps de masse exacte $72,37g$

1. Quelle est la probabilité $P(72,3 < X < 72,5)$?
2. Déterminer un intervalle I centré sur 72,37 tel que $P(X \in I) = 0,98$.

Exercice 8

On effectue 30 observations d'une variable aléatoire X supposée normale. Parmi les valeurs observées, 5 sont inférieures à 240, 15 sont comprises entre 240 et 250, 10 sont supérieures à 250.

Proposer des valeurs pour l'espérance μ et l'écart-type σ de X.

Exercice 9

Un restaurant peut servir 75 repas.
La pratique montre que 20 % des clients ayant réservé ne viennent pas.

1. Le restaurateur accepte 90 réservations.
   Quelle est la probabilité qu'il se présente plus de 50 clients.
2. Combien le restaurateur doit-il accepter de réservations pour avoir une probabilité supérieure ou égale à 0,9 de pouvoir servir tous les clients qui se présenteront ?

Exercice 10

On suppose que la durée de vie d'une ampoule électrique est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,2 * 10^{-3} h^{-1}$.
Si l'on remplace une ampoule par une ampoule semblable dès qu'elle ne fonctionne plus, qu'elle est la probabilité qu'au bout de 50 000 heures l'ampoule en fonctionnement soit au moins la dixième ?