Fonctions Génératrices

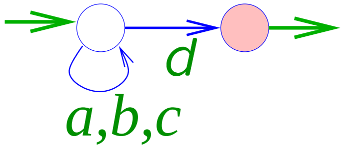
Lorsque les v.a. prennent valeurs dans $\mathbb{N}$, l'utilisation des fonctions génératrices pour les suites des probabilités et les techniques associées deviennent outils favoris dans l'étude des distributions discrètes. La fonction génératrice d'une v.a. X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est définie par :

$$G_X(z) = \sum_{k \geq 0} Pr(X = k) z^k.$$

Cette série entière en z contient toutes les informations sur la v.a. X. Elle est, par ailleurs l'espérance de z^X, puisque :

$$G_X(z) = \sum_{\omega \in \Omega} Pr(\omega) z^{X(\omega)}.$$

Exemple. (**Une application à la théorie des langages**) Soit $A = \{a, b, c, d\}$ un alphabet à 4 lettres. Appelons L l'ensemble des mots générés par le "schéma" suivant :



*L={a,b,c}*d*

Supposons maintenant qu'on tire successivement une lettre dans A avec la même probabilité $\frac{1}{4}$, jusqu'à ce qu'on obtienne la lettre d. L'ensemble des mots qui peuvent être obtenus par ces tirages est le même langage L introduit précédemment :

$$\begin{aligned} L = \{w \in A^* \quad | \quad & w \text{ se termine par une occurrence de } d \\ & \text{et ne contient pas d'autre occurrence de } d\} \\ = \ & \{a, b, c\}^* d \end{aligned}$$

On peut munir $\Omega = L$ d'une distribution de probabilité en associant à chaque mot $\in L$ la probabilité de son tirage. Par exemple $Pr(ababad) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4^6}$.

Soit X la v.a. associant à chaque mot de L sa longueur. Il est facile de voir que $Pr(X = k) = \frac{3^{k-1}}{4^k}$.

La fonction génératrice de X est donc :

$$G_X(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^{k-1}}{4^k} z^k = \frac{z}{4 - 3z}.$$

Propriétés élémentaires

Dans la suite nous retirons l'indice X de $G_X(z)$ lorsqu'il n'y a pas de danger de confusion.

Proposition. On a $G(1) = 1$.

Proposition. On peut obtenir l'espérance et la variance d'une v.a. à partir de sa fonction génératrice par :

- $\mathbb{E}X = G'(1)$
- $\mathbb{V}X = G''(1) + G'(1) - [G'(1)]^2$.

Exemple. Reprenons le cas du langage L, muni de la distribution qui associe à tout mot de longueur k une probabilité égale à $\frac{1}{4^k}$. On vérifie facilement que :

$$G(1) = 1.$$

On calcule l'espérance et la variance en dérivant G. On a :

$$G'(z) = \frac{d}{dz}G(z) = \frac{4}{(4-3z)^2}$$

et

$$G''(z) = \frac{4.2.3.(4-3z)}{(4-3z)^4} = \frac{24}{(4-3z)^3}.$$

Nous avons en vertu de la proposition précédente :
- $\mathbb{E}X = G'(1) = 4$
- $\mathbb{V}X = G''(1) + G'(1) - [G'(1)]^2 = 24 + 4 - 4^2 = 12$

****

Une autre propriété importante

Une propriété caractéristique des fonctions génératrices est la suivante qui est très utile en calcul des probabilités, lorsqu'on a affaire à la somme des v.a. indépendantes.

Proposition. Soient X et Y deux v.a. indépendantes. La fonction génératrice de la v.a. $X+Y$ est le produit des fonctions génératrices de X et de Y :

$$G_{X+Y}(z) = G_X(z)G_Y(z).$$

Exemple. On continue le tirage de lettres dans l'alphabet $\{a,b,c,d\}$ et l'on s'arrête, cette fois, après la seconde occurrence de la lettre d. Le "schéma" ci-dessous génère le langage des mots qui peuvent être tirés :

Par ailleurs, on a $|w| = |u| + |v|$, où $X = |u|$ et $Y = |v|$ sont deux v.a. indépendantes. En vertu de la proposition précédente, la longueur $S = X + Y$ du mot tiré dans $L2$ admet la fonction génératrice :

$$G_S(z) = G_X(z)G_Y(z) = \left[\frac{z}{4-3z}\right]^2 = \frac{z^2}{(4-3z)^2}.$$

On peut obtenir l'espérance et la variance de S en dérivant $G_S(z)$, mais la méthode la plus simple consiste à faire la somme des espérances et la somme des variances :

- $\mathbb{E}S = 4 + 4 = 8$
- $\mathbb{V}S = 12 + 12 = 24$.

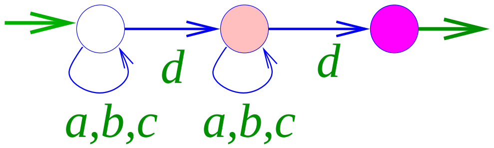
Loi binomiale. On effectue n épreuves identiques et indépendantes ; la probabilitié de succès dans chacune étant supposée égale à p et celle d'échec $q = 1 - p$. Posons $X =$ le nombre total de succès obtenus dans les épreuves. X est une v.a. qui peut prendre la valeur k dans l'intervalle $[0, n]$ avec la probabilité :

$$p_k = Pr(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

(**Rappel :** $\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.)

On dit alors que X *suit une loi binomiale de paramètres* n et p.

Il est clair qu'on peut considérer la v.a. binomiale X comme la somme de n v.a. de Bernoulli identiques et indépendantes de même paramètre p. Nous avons donc $\mathbb{E}X = np$, $\mathbb{V}X = npq$ et $\sigma X = \sqrt{npq}$.



$$L2=\{a,b,c\}^*d\{a,b,c\}^*d$$

Nous avons

$$L2 = LL$$

et tout mot w dans $L2$ est la concaténation d'un mot $u \in L$ et un mot $v \in L$. Ces deux derniers mots sont tirés indépendamment chacun dans L.

Quelques Distributions Discrètes

Loi de Bernoulli. La v.a. X prend deux valeurs : 1 avec la probabilité p ou 0 avec la probabilité q ; on suppose que $p, q \in [0, 1]$ et $p + q = 1$. Nous avons :

- $\mathbb{E}X = p$
- $\mathbb{V}X = pq$
- $\sigma X = \sqrt{pq}$

Utilisation. Cette loi intervient souvent de façon implicite lorsqu'on veut traiter une probabilité comme une espérance. En effet c'est la loi de la v.a. qui est la fonction indicatrice d'un événement A de probabilité p :

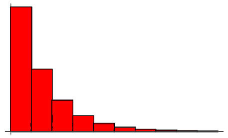
$$Pr(A) = \mathbb{E}\mathbf{1}_A.$$

Loi géométrique. Soit $p > 0$ la probabilité de succès dans une épreuve. Posons $q = 1 - p$. Nous répétons la même épreuve indépendamment jusqu'à l'obtention d'un *premier* succès. Soit X la v.a. désignant le nombre d'épreuves effectuées. C'est une v.a. qui peut prendre la valeur $k \in \mathbb{N}^*$ avec la probabilité :

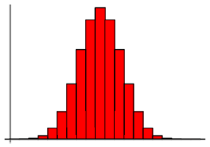
$$p_k = Pr(X = k) = q^{k-1}p.$$

On dit alors que X suit une *loi géométrique de paramètre* p. On calcule son espérance et sa variance soit par une méthode directe soit en dérivant sa fonction génératrice :

- $\mathbb{E}X = \frac{1}{p}$
- $\mathbb{V}X = \frac{q}{p^2}$
- $\sigma X = \frac{\sqrt{q}}{p}$



Distribution géométrique



Distribution binomiale

Loi de Poisson. Cette distribution intervient dans l'étude du nombre d'événements intervenant dans un intervalle de temps (files d'attente). Elle propose aussi des modèles statistiques pour des événements dits "rares" lorsqu'un grand nombre de cas a été étudié. La variable aléatoire X *suit une loi de Poisson de paramère* λ, si X peut prendre la valeur $k \in \mathbb{N}$ avec la probabilité :

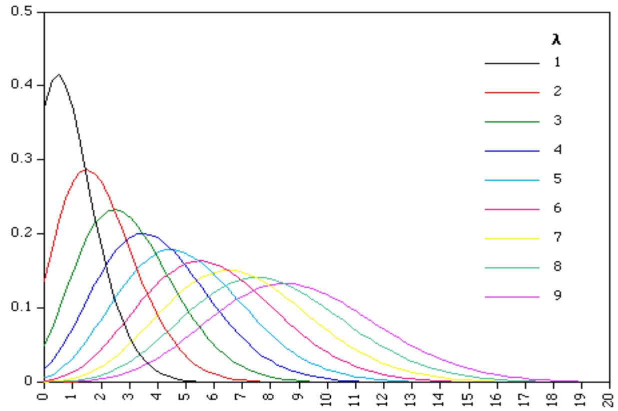
$$p_k = Pr(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

On démontre facilement que la somme des probabilités vaut 1.

L'espérance et la variance d'une distribution de Poisson se calculent aisément et on a :

- $\mathbb{E}X = \lambda$
- $\mathbb{V}X = \lambda$
- $\sigma X = \sqrt{\lambda}$

Distribution de Poisson pour différentes valeurs de λ



Une propriété importante de la loi de Poisson se porte sur la somme :
Proposition. La somme deux v.a. de Poisson indépendantes de paramètres λ et μ est une v.a. de Poisson de et paramètres $\lambda + \mu$.

Une modélisation par la loi de Poisson est justifiée lorsqu'on étudie les occurrences d'un événement de faible probabilité dans une population de grande taille :

Proposition (Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson.) Soit X_n une suite de v.a. de loi binomiale de paramètres p_n et n. On suppose que $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda > 0$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{n\to\infty} Pr(X_n = k) \ = \ e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$