Quelques Exemples (suite)

Espérance de la loi normale. Pour la v.a. X de paramètres m et σ, nous avons :

$$\mathbb{E}X = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) dx.$$

Introduisons le changement de variable $y = \frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}}$, il vient :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\sqrt{2}\sigma y + m)e^{-y^2}dy \\ &= \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} y e^{-y^2}dy + \frac{m}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy.\end{aligned}$$

La première intégrale vaut :

$$\int_{-\infty}^{\infty} y e^{-y^2}dy = \left[-\frac{e^{-y^2}}{2}\right]_{-\infty}^{\infty} = 0,$$

et la seconde :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy = \sqrt{\pi}.$$

D'où $\mathbb{E}X = m$.

Espérance de la loi de Cauchy. Pour que la loi de Cauchy admette une espérance, il est nécessaire que sa partie positive et sa partie négative en admette une. Mais nous avons :

$$\frac{1}{\pi}\int_0^L \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2\pi}\left[\ln(1+x^2)\right]_0^L = \frac{\ln(1+L^2)}{2\pi}.$$

Cette expression tend vers ∞ lorsque $L \to \infty$. On en déduit que la loi de Cauchy n'admet pas d'espérance.

Exemple 4 (Loi Exponentielle). Cette loi a beaucoup d'importance dans l'étude de durée de vie des particules subatomiques en physique théorique et aussi dans celle des files d'attentes. Elle possède en effet la propriété "sans mémoire" qui la distingue des autres lois possédant une densité.

On dit la v.a. réelle à valeurs positives X *suit une loi exponentielle de paramètre* $\lambda > 0$, si elle admet la densité :

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x},\ x \in \mathbb{R}^+.$$

On démontre facilement que $\int_0^\infty f(x)dx = 1$. On en déduit que f est bien une densité. On peut calculer facilement la f.r. de X. Nous avons en effet :

$$F(t) = \int_0^t f(x)dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Nous avons en particulier $Pr(X > t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t}$. On en déduit, pour $s, t > 0$:

$$\begin{aligned}Pr(X > s+t \ / \ X > s) &= \frac{Pr(X>s+t \text{ et } X>s)}{Pr(X>s)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} \\ &= e^{-\lambda t} \\ &= Pr(X > t).\end{aligned}$$

Cette propriété est appelée "*sans mémoire*".

On peut montrer que, réciproquement, si une loi, admettant une densité, est sans mémoire, alors elle est exponentielle.

L'espérance de loi exponentielle se calcule facilement et on a :

$$\mathbb{E}X = \int_0^\infty \lambda x e^{-\lambda x} dx.$$

Effectuant d'abord le changement de variable $y = \lambda x$, ensuite une intégration par partie (voir aussi **intégrales eulériennes**) permet d'écrire :

$$\mathbb{E}X = \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty y e^{-y} dy = \frac{1}{\lambda}.$$

Propriétés de l'espérance

Dans la suite nous considérons les v.a. admettant une densité. Les propriétés énumérées sont vraies dans le cas général.

Linéarité de l'espérance

Théorème. Soient X et X deux v.a. définies sur le même espace et soient α et β deux réels quelconques. Alors :

$$\mathbb{E}(\alpha X + \beta Y) = \alpha\ \mathbb{E}X + \beta\ \mathbb{E}Y.$$

Produit

Théorème. Soient X et Y deux v.a. sur le même espace et indépendantes d'espérance finie. Alors la v.a. XY admet une espérance et $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}X\ \mathbb{E}Y$.

****

Définition. Une v.a. est dite *centrée* si son espérance est 0. Si la X admet l'espérance $\mathbb{E}X$, alors la v.a. $Y = X - \mathbb{E}X$ est centrée.

Variance

Définitions. Soit X une v.a. admettant une espérance. La *variance* de X est définie par :

$$\mathbb{V}X = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2,$$

si cette espérance existe. La racine carrée de la varinace est appelée *écart-type* et est notée par σX.

Si une v.a. est de variance 1, on dit qu'elle est *réduite*.

Propriétés de la Variance

Proposition. On a :

Exemple 1 (Loi Uniforme). Rappelons la densité de la loi uniforme étant définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < a \\ \frac{1}{b-a} & \text{si} \quad a \leq x < b \\ 0 & \text{si} \quad x \geq b. \end{cases}$$

Nous avons :

$$\mathbb{E}X^2 = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx = \left[\frac{x^3}{3(b-a)}\right]_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}.$$

D'où :

$$\mathbb{V}X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{(b+a)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

- $\mathbb{V}X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2$.
- $\mathbb{V}(\alpha X) = \alpha^2 \, \mathbb{V}X$.
- $\mathbb{V}(X+a) = \mathbb{V}X$.

Proposition. Si les v.a. X et Y sont indépendantes, alors :

$$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}X + \mathbb{V}Y.$$

Nous calculons dans la suite la variance pour les 3 lois dont l'espérance a été calculée.

La loi de Cauchy n'admet pas de variance puisqu'elle n'a pas d'espérance.

Exemple 2 (Loi Normale). Nous avons :

$$\mathbb{E}X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) dx.$$

Le changement de variable $y = \frac{x-m}{\sqrt{2}\sigma}$ permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X^2 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (y\sqrt{2}\sigma + m)^2 e^{-y^2} dy \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-y^2} dy + 2m\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y e^{-y^2} dy \\ &\quad + \frac{m^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy. \end{aligned}$$

Or :

$$\int_{-\infty}^{\infty} y e^{-y^2} dy = 0$$

et :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}.$$

Pour la première intégrale figurant dans le calcul de $\mathbb{E}X^2$, la méthode d'intégration par partie conduit à :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-y^2} dy &= \left[-y\frac{e^{-y^2}}{2}\right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-y^2}}{2} dy \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \end{aligned}$$

On en déduit $\mathbb{E}X^2 = \sigma^2 + m^2$ et donc :

$$\mathbb{V}X = \sigma^2.$$

L'espérance et l'écart-type d'une loi normale de type $\mathcal{N}(m, \sigma)$ ne sont donc que les paramètres m et σ de la loi.

Exemple 3 (Loi Exponentielle). Nous avons :

$$\mathbb{E}X^2 = \int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx.$$

Le changement de variable $y = \lambda x$ permet d'écrire :

$$\mathbb{E}X^2 = \frac{1}{\lambda^2} \int_0^\infty y^2 e^{-y} dy$$

Ce qui vaut $\frac{2}{\lambda^2}$ (voir la fonction Γ). On en déduit :

$$\mathbb{V}X = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$