Fonction Caractéristique

Dans le cas des v.a. discrètes la fonction génératrice permet une caractérisation simple de la loi et constitue un outil puissant et efficace pour manipuler des opérations complexes telles que la somme des v.a. indépendantes, calcul des moments et étude des comportements asymptotiques de suites des v.a.

Dans le cas des v.a. continues, on doit remplacer le concept de la somme par celle de l'intégrale. Il existe plusieurs techniques pour définir une transformation de même performance applicable à des lois de probabilité quelconques. L'outil le plus populaire est la fonction caractéristique

Définition. La *fonction caractéristique* (f.c.) d'une v.a. X est définie par :

$$\varphi(t) = \mathbb{E}(e^{itX}).$$

Étant donné que $|e^{itx}| = 1$, la f.c. est bien définie.

Propriétés

Proposition. Soit $\varphi(t)$ la f.c. de la v.a. X. On a :

- $\varphi(0) = 1$.
- $\varphi'(0) = i\ \mathbb{E}X$.
- $\varphi''(0) = -\mathbb{E}X^2$.

Proposition. Soient X et Y des v.a. indépendantes de f.c. $\varphi_X(t)$ et $\varphi_Y(t)$ respectivement. Alors la v.a. $Z = X + Y$ admet la f.c.

$$\varphi_Z(t) = \varphi_X(t)\ \varphi_Y(t).$$

Proposition. Si la f.c. de la v.a. X est $\varphi(t)$, alors la v.a. $Y = aX + b$, où $a, b \in \mathbb{N}$ vaut $e^{itb}\varphi(at)$.

Quelques Exemples

Exemple 1 (Loi Uniforme). Reconsidérons la v.a. X uniformément répartie dans $[a, b]$. Sa fonction caractéristique vaut :

$$\varphi(t) = \mathbb{E}e^{itX} = \frac{1}{b-a}\int_a^b e^{itx}dx \ = \frac{e^{itb} - e^{itb}}{it(b-a)}.$$

Exemple 2 (Loi Normale). Nous calculons la f.c. de la v.a. suivant une loi normale centrée-réduite ($\mathcal{N}(0,1)$). On a :

$$\varphi(t) = \mathbb{E}e^{itX} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} e^{itx}dx.$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2 - 2itx)}dx \\
&= \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2 - 2itx + (it)^2)}dx \\
&= \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x - it)^2}dx.
\end{aligned}$$

Cette dernière intégrale, suggère la changement de variable $y = \frac{x-it}{\sqrt{2}}$, et l'on aura :

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \times \sqrt{2} dx \\ &= e^{-\frac{t^2}{2}}\end{aligned}$$

Exemple 3 (Loi Exponentielle). Pour la f.c. de la loi exponentielle de paramètre λ, nous avons :

$$\varphi(t) = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} e^{itx} dx = \lambda \int_0^{\infty} e^{x(-\lambda+it)} dx = \frac{\lambda}{\lambda - it}.$$

Il faut noter que le calcul de la f.c. ne se limite pas aux v.a. admettant une densité. Calculons à titre d'exemple la f.c. d'une v.a. binomiale.

Exemple 4. Soit X une v.a. binomiale de paramètres p et n. On suppose $0 \leq p \leq 1$ et on pose $q = 1 - p$. Évidemment, on peut calculer la f.c. directement à partir de l'expression de la loi probabilité :

$$Pr(X = k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}.$$

Mais, sachant que la v.a. binomiale est la somme de n v.a. identiques et indépendantes de Bernoulli de paramètre p, une méthode plus subtile consiste à calculer la f.c. de la loi de Bernoulli ; la f.c. de la v.a. sera alors, d'après la proposition sur la f.c. de la somme de v.a. indépendante, la $n-$ème puissance de la f.c. de Bernoulli. Donc :

$$\varphi(t) = (q + pe^{it})^n.$$

Dans le cas des v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$, si la f.g. est disponible, on peut la transformer en f.c. :

Proposition. Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$. Soit $G(z)$ sa fonction génératrice. Alors sa fonction caractéristique vaut :

$$\varphi(t) = G(e^{it}).$$

La formule d'inversion qui permet de construire la f.r. ou la densité à partir de la f.c. sort du cadre que nous nous sommes fixé ici†.

****

† Voir M. Métivier, Notions Fondamentales de la Théorie des Probabilités, Dunod, 1972.

Convergence Stochastique

Proposition (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev). Soit X une v.a. d'espérance μ et de variance V. Alors, pour tout $\epsilon > 0$:

$$Pr\left(|X - \mu| \geq \epsilon\right) \leq \frac{V}{\epsilon^2}.$$

Dans la suite, nous étudions très sommairement certaines notions d'approximation pour une suite de v.a. Il existe plusieurs définitions de convergences pour une suite de v.a. Elles ne sont pas équivalentes et certaines sont plus fortes que d'autres. Les convergences que nous allons considérer sont parmi les plus simples.

Nous en avons, d'ailleurs, déjà cité deux exemples portant sur la loi binomiale. Soit X_n une suite de v.a. binomiales de paramètres λ et n. Alors :

- Si p reste fixé et que n tend vers ∞, alors $Pr\left(|\frac{X_n}{n} - p| \geq \epsilon\right) \rightarrow 0$, quel que soit $\epsilon > 0$.
- Si n tend vers ∞ et p tend vers 0 tels que $np \rightarrow \lambda > 0$, alors $Pr(X_n = k)$ tend vers $e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ (i.e. une distribution de Poisson).

Il est évident que ces deux modes de convergence, l'un pour $\frac{X_n}{n}$ et l'autre pour X_n, sont distincts : le premier confirme que $\frac{X_n}{n}$ s'approche *avec une quasi-certitude vers* p alors que le second montre que X_n *suit asymptotiquement* une loi de Poisson.

Définitions. Soit $X_n, n \in \mathbb{N}$ une suite de v.a. et soit X_n une v.a. quelconque.

- On dit que la suite X_n *converge en probabilité vers la v.a.* X, si pour tout $\epsilon > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} Pr\left(|X_n - X| \geq \epsilon\right) = 0.$$

- On dit que la suite X_n *converge en loi vers la v.a.* X, si pour tout a point de continuité de la f.r. de X :

$$\lim_{n\to\infty} Pr(X_n \leq a) = Pr(X \leq a),$$

autrement dit, la f.r. $F_n(x)$ de X_n converge vers la f.r. $F(x)$ de X en tout point de continuité de $F(x)$.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev (pour les v.a. réelles) permet de généraliser la loi des grands nombres pour les suites de v.a. indépendantes et identiquement distribuées (qui ne sont pas nécessairement discrètes).

Théorème (Loi faible des Grands Nombres). Soit X_n une suite de v.a. indépendantes et identiquement distribuées, admettant chacune l'espérance μ et la variance V. Alors la suite des v.a. constituées de leurs moyennes arithmétiques, i.e. la suite $M_n = \frac{1}{n}\sum_1^n X_i$ converge en probabilité vers μ.

Théorème Central Limite

La loi des grand nombre est très importante. Elle établit en effet un pont entre des prévisions probabilistes et des confirmations qui frisent la quasi-certitude. Mais pour en arriver là, un grand nombre de répétitions d'épreuve est nécessaire. Malheureusement la loi ne nous dit rien sur la vitesse de convergence vers la certitude.

Le théorème central limite a pour objectif de remédier à ce problème en multipliant l'écart entre la valeur aléatoire (la moyenne) et la valeur certaine approchée (l'espérance) par la racine carrée de de n.

Théorème (de Moivre-Laplace). Soit X_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, une suite de v.a. binomiales de paramètres p et n ; on suppose $0 < p < 1$. Alors la suite $\frac{X_n - np}{\sqrt{n}}$ converge en loi, lorsque $n \to \infty$, vers une v.a. de loi $\mathcal{N}(0, \sqrt{p(1-p)})$.

Exemple (J. Istas). Deux candidats se présentent à une élection. Un institut effectue des sondages auprès des électeurs. Lorsque l'institut veut diviser l'erreur commise par 10, de combien doit-il augmenter l'effectif des sondés ?

Solution. On peut modéliser le nombre d'électeurs sondés favorables par une v.a. de Bernoulli de paramètres p et n. Le théorème de Moivre-Laplace nous dit que l'erreur commise en effectuant un sondage diminue avec la racine carrée du nombre des sondés. Diviser l'erreur par 10 oblige à augmenter le nombre de sondés par 100.

Crible de Galton

Théorème (Central limite). Soit X_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, une suite de v.a. indépendantes et identiquement distribuées, admettant chacune l'espérance μ et la variance $V = \sigma^2 > 0$. Soit M_n la valeur moyenne de la suite :

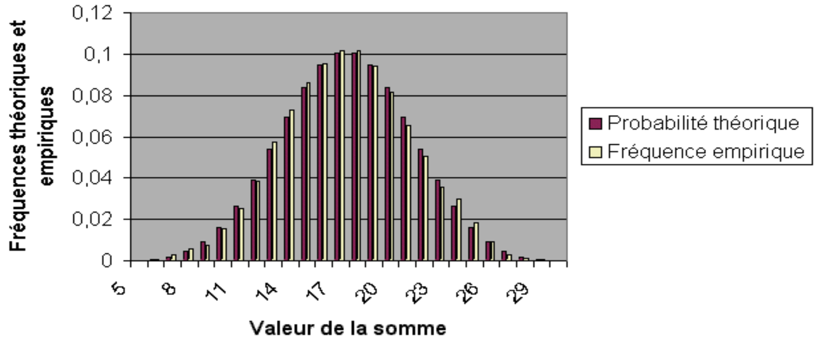
$$M_n = \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} X_n.$$

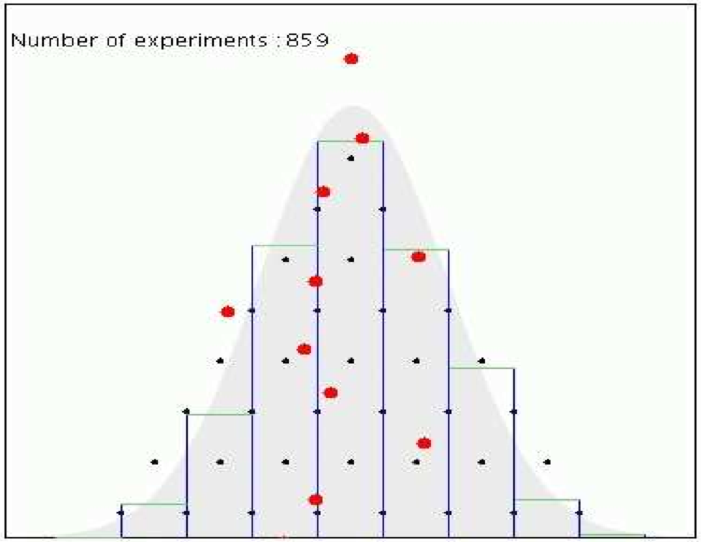
Alors la suite $\sqrt{n}\ (M_n - \mu)$ converge en loi, lorsque $n \to \infty$, vers une v.a. normale centrée et de variance σ^2. Nous avons donc, pour tout intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to\infty} Pr\left(\sqrt{n}\ (M_n - \mu) \in [a, b]\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx.$$

On en déduit comme corollaire :

Lancement de 5 dés




Number of experiments : 859