

## Devoir Maison n° 1

**Préambule :** Les questions 1, 2, 3 ne demandent **aucune** justification : seul le résultat sera pris en compte. Les questions 4 et 5 demandent une explication **brève**. De manière générale, on veillera à la concision et à la clarté dans les réponses fournis.

On se propose d'étudier le nombre d'occurrences d'un motif (c'est à dire un sous-mot) dans un mot de taille  $n$ .

Pour modéliser ce problème, on considère l'espace de probabilité  $\Omega_n = \{a, b\}^n$  dans lequel tous les événements élémentaires sont équiprobables. Chaque événement élémentaire est considéré comme un mot de  $n$  lettres. On adopte aussi une notation mot. Par exemple, les éléments de  $\Omega_2$  sont notés  $\Omega_2 = \{aa, ab, ba, bb\}$ .

Sur l'espace de probabilité  $\Omega_n$  on considère la variable aléatoire  $X_n$  définie comme le nombre d'occurrence du sous-mot  $aa$ . Par exemple, on a  $X_5(aabab) = 1$  et  $X_5(baaab) = 2$ .

1) Que vaut  $X_{10}(abbaaaabaa)$  ?

On note  $G_n(z)$  la série génératrice de  $X_n$ .

2) Calculez  $G_1(z)$ ,  $G_2(z)$  et  $G_3(z)$ .

Soit  $A_n$  l'ensemble des mots de longueur  $n$  terminant par la lettre  $a$  et  $B_n$  l'ensemble des mots de longueur  $n$  terminant par la lettre  $b$ .

On définit les séries  $H_n(z)$  et  $K_n(z)$  par  $H_n(z) = \sum_{w \in A_n} P_r(w)z^{X_n(w)}$  et  $K_n(z) = \sum_{w \in B_n} P_r(w)z^{X_n(w)}$ .

3) Que valent  $H_1(z)$  et  $K_1(z)$  ?

4) Que valent  $H_n(1)$  et  $K_n(1)$  ? (Justifiez brièvement votre réponse.)

5) Établir une relation simple entre  $G_n(z)$ ,  $H_n(z)$  et  $K_n(z)$ .

6) Montrez que  $H_{n+1}(z) = \frac{z}{2}H_n(z) + \frac{1}{2}K_n(z)$ . On pourra remarquer qu'un mot de  $A_{n+1}$  est soit un mot de  $A_n$  auquel on rajoute la dernière lettre  $a$  soit un mot de  $B_n$  auquel on rajoute la dernière lettre  $a$ .

De même, montrez que  $K_{n+1}(z) = \frac{1}{2}H_n(z) + \frac{1}{2}K_n(z)$ .

7) (Question optionnelle) Montrez qu'il existe une matrice de dimension  $2 \times 2$ ,  $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \gamma \end{pmatrix}$  telle que le système de la question 5 se mette sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} H_{n+1}(z) \\ K_{n+1}(z) \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} H_n(z) \\ K_n(z) \end{pmatrix}.$$

En déduire que  $\begin{pmatrix} H_{n+1}(z) \\ K_{n+1}(z) \end{pmatrix} = M^n \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ .