

TD n° 2 : Indépendance, séries génératrices, distributions classiques.

Exercice 1

Indépendance

a) Soit A et B deux événements indépendants sur un espace de probabilité Ω . On note \bar{A} et \bar{B} leur complémentaires respectifs.

Montrez que les événement \bar{A} et B sont indépendants. De même montrez que \bar{A} et \bar{B} sont indépendants.

b) On considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes sur l'espace Ω .

– Montrez que $E(XY) = E(X)E(Y)$.

– Montrez que pour deux ensembles quelconques $E = \{x_1, \dots, x_k\}$, $F = \{y_1, \dots, y_l\}$ on a l'égalité

$$P_r(X \in E, Y \in F) = P_r(X \in E)P_r(Y \in F) .$$

En déduire la probabilité de l'événement « $X \in E$ ou $Y \in F$ ».

– Montrez que si f est une fonction quelconque et que l'on note $Z = f(Y)$ alors les variables aléatoire X et Z sont indépendantes.

Exercice 2

Pile ou face - suite

On tire à « pile ou face » $2n$ fois de suite. On décrit cette expérience par l'espace de probabilité $\Omega = \{P, F\}^{2n}$ et on suppose que chaque événement atomique est équiprobable. On considère les variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_{2n} défini par : $X_i(w) = 1$ si on obtient « pile » au $i^{\text{ème}}$ lancer et $X_i(w) = 0$ sinon.

– Quelle est la fonction génératrice de la variable X_i ? En déduire son espérance, sa variance.

– Soit la variable aléatoire $S = \sum_{i=1}^{2n} X_i$. Calculez la fonction génératrice de S . Quel est le coefficient de z^n dans cette série? En déduire la probabilité « d'obtenir autant de piles que de faces ». Calculez l'espérance de S et sa variance.

Exercice 3

Jeu de dé - suite

a) On considère le jeu qui consiste à lancer un dé (à six faces) et on suppose tous les résultats équiprobables. À cette expérience, on associe la variable aléatoire X qui correspond au score.

– Calculez la série génératrice de X . En déduire la valeur de l'espérance et de la variance de X .

– On pose $Y = 2X$. Quelle est la fonction génératrice de Y ?

– On pose $Z = X + 3$. Quelle est la fonction génératrice de Z ?

b) On considère le jeu qui consiste à lancer deux dés et on suppose tous les résultats équiprobables. À cette expérience, on associe la variable aléatoire S qui correspond à la somme des deux dés et la variable aléatoire T qui correspond au produit.

– Calculez l'espérance de T . Comparez cette valeur à l'espérance de X^2 .

– Calculez la série génératrice de S . Comparez ce résultat à la série génératrice de Y .

Exercice 4

Soit l'espace de probabilité $\Omega = \{0, 1, \dots, n\}$.

a) On considère la distribution de probabilité $P_r : k \mapsto \alpha \cdot C_n^k$.

– Quelle est la valeur de α ?

– Quelle est la série génératrice de cette distribution (i.e. la fonction génératrice de la variable aléatoire identité)? Quelle est son espérance?

b) On considère, à présent, la distribution de probabilité $P_r : k \mapsto \beta \cdot k C_n^k$.

– Quelle est la valeur de β ?

– Quelle est la série génératrice de cette distribution? Quelle est son espérance?

Exercice 5

Analyse d'algorithme

On se propose d'analyser la complexité moyenne (aussi appelée « complexité amortie ») d'un algorithme.

On considère l'algorithme ci-dessous pour trouver le plus grand élément dans une liste non vide L de n entiers :

début

(1) $M := L[1]$;

(2) **pour** $j := 2$ à n **faire**

(3) **si** $L[j] > M$ **alors** $M := L[j]$

fin

– Quel est le nombre de comparaisons effectuées (ligne 3) ?

– Quel est le nombre d'affectations (lignes 1 et 3) dans le cas le plus favorable ? le plus défavorable ?

Dans la suite, on suppose que les éléments de la liste sont deux-à-deux distincts et que tous les $n!$ permutations possibles ont la même probabilité d'apparaître dans la liste. Soit $p(n, k)$ la probabilité pour que, dans l'application de l'algorithme à une liste (aléatoire) L de taille n , k affectations soient nécessaires.

– Montrez la récurrence suivante :

$$p(n, k) = \frac{1}{n}p(n-1, k-1) + \frac{n-1}{n}p(n-1, k), \text{ pour } n \geq 2 \text{ et } 1 \leq k \leq n.$$

(On peut considérer deux cas suivant que le $n^{\text{ème}}$ élément est maximal ou non.)

– Soit, par ailleurs, $G_n(z) = \sum_{1 \leq k \leq n} p(n, k)z^k$ la fonction génératrice de la distribution des probabilités $p(n, k)$. Dédurre de la récurrence ci-dessus une récurrence sur G_n et donner une expression simple pour G_n .

– Trouvez le nombre moyen d'affectations, i.e. $\sum_{1 \leq k \leq n} kp(n, k)$. Quel est son ordre de grandeur lorsque $n \rightarrow \infty$?