

Solution TD5 exercice 7

1 - On doit avoir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{1+x^2} = 1$$

donc

$$a[\operatorname{arctg}(x)]_{-\infty}^{+\infty} = 1$$

D'où

$$a = \frac{1}{\pi}$$

2 -

$$P(X \geq 1) = \frac{1}{\pi} \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{\pi} [\operatorname{arctg}(x)]_1^{+\infty} = \frac{1}{4}$$

3 -

$$E(X) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{2\pi} [\log(1+x^2)]_0^{+\infty} = +\infty$$

Par suite, X n'a pas d'espérance et de même pas de variance.

Attention. Si $g(x)$ est une primitive d'une fonction $f(x)$ et $a > 0$ est fini alors

- $[g(x)]_{-a}^a = 0$ si $g(x)$ est paire
- $[g(x)]_{-a}^a = 2g(a)$ si $g(x)$ est impaire

Cette propriété ne s'applique que si a est fini.

4 - La fonction de répartition de x est

$$F_X(a) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^a \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}(a)$$

On a

$$F_Y(a) = \Pr(Y < a) = \Pr(|X| < a)$$

Donc

$$F_Y(a) = F_X(a) - F_X(-a) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}(a)$$

Par suite

$$\int_{-\infty}^a f_Y(x) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}(a)$$

On a donc

$$f_Y(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi(1+x^2)} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

