
TD n° 6- Exercice 3

1. $\forall n \geq 0$,

$$[X] = n \text{ ssi } n \leq X < n+1, \text{ donc } P(Y = n) = P(n \leq X < n+1) = \int_n^{n+1} f(t)dt.$$

$$D'o\grave{u} f_Y(n) = f_X(n+1) - f_X(n).$$

On pose maintenant $Z = X - Y$.

On a $\forall x \in [0, 1[$,

$Z \leq x$ ssi $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $n \leq X \leq x + n$ d'o\grave{u}

$$\text{si } x \in [0, 1[, F_Z(x) = P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n \leq X \leq n+x\}\right) = \sum_{n \geq 0} \int_n^{n+x} f(t)dt,$$

si $x \geq 1$, $F_Z(x) = 1$.

2. On a :

$$E(Y) = \sum_{n \geq 0} n \int_n^{n+1} f(t)dt \text{ et } E(X) = \int_0^\infty tf(t)dt = \sum_{n \geq 0} \int_n^{n+1} tf(t)dt,$$

or, pour tout $t \in [n, n+1[$, $n \geq 0$,

$$nf(t) \leq tf(t) < (n+1)f(t)$$

alors :

$$\sum_{n \geq 0} \int_n^{n+1} nf(t)dt \leq E(X) < \sum_{n \geq 0} \int_n^{n+1} (n+1)f(t)dt$$

c'est \grave{a} dire

$$E(Y) \leq E(X) < E(Y) + 1$$

Alors $E(Y)$ converge ssi $E(X)$ converge.

3. Si X suit une loi exponentielle de param\`etre λ alors

$$E(X) = \lambda^{-1}$$

Par ailleurs

$$E(Y) = \sum_{n \geq 0} n \int_n^{n+1} f(t)dt$$

donc

$$E(Y) = \sum_{n \geq 0} n \int_n^{n+1} \lambda e^{-\lambda t} dt$$

$$E(Y) = \sum_{n \geq 0} n(e^{-n\lambda} - e^{-(n+1)\lambda})$$

$$E(Y) = (1 - e^{-\lambda}) \sum_{n \geq 0} n e^{-n\lambda}$$

Or

$$\sum_{n \geq 0} n e^{n\lambda} \frac{e^\lambda}{(-1 + e^\lambda)^2}$$

Donc

$$E(Y) = -\frac{e^{-\lambda}}{-1 + e^{-\lambda}}$$

et par suite

$$E(Z) = E(X) - E(Y) = \lambda^{-1} + \frac{e^{-\lambda}}{-1 + e^{-\lambda}}.$$