

Solution TD6 exercice 9

Pour définir la position de l'aiguille il suffit de définir

- La position r du centre de l'aiguille par rapport à la lame de plancher la plus proche
- L'angle θ que fait l'aiguille avec la lame de plancher la plus proche du centre

Remarquons que $r \in [0..1/2]$ et $\theta \in [0..\pi/2]$. La probabilité recherchée sera donnée par l'aire totale (A) que peut occuper l'aiguille en coupant une jointure divisée par l'aire totale que l'aiguille peut occuper (T).

La surface totale est

$$T = \int_0^{\pi/2} \int_0^{1/2} dr d\theta = \frac{\pi}{4}$$

Quand θ est fixé alors pour que l'aiguille coupe une jointure il faut que $r \in [0..\sin(\theta)/2]$. Donc

$$A = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sin(\theta)/2} dr d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \sin(\theta) d\theta = \frac{1}{2}$$

Par suite la probabilité recherchée est $2/\pi$.