

TD n° 6 : Probabilités continues

Exercice 1

Soit X une v.a.r admettant une densité f et $a > 0$. Montrer que $Y = aX$ admet pour densité $g(x) = \frac{1}{a}f(\frac{x}{a})$.

Exercice 2

Comme chacun sait, la durée de vie d'une savonnette (en jours) est une v.a.r T dont la loi admet une densité

$$f(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t} \mathbf{1}_{[0, +\infty[}(t).$$

Une longue expérience indique que la moyenne $E(T)$ est de 20 jours.

1. Calculer le paramètre λ ainsi que la fonction de répartition de T
2. Calculer la probabilité que la savonnette dure plus de 30 jours sachant qu'elle est toujours là au bout de 10 jours.

Exercice 3

Soit X une variable aléatoire continue, à valeurs dans \mathbb{R}^+ , de densité f .

Soit $Y = [X]$ la partie entière de X .

1. Préciser la loi de Y et la fonction de répartition de $Z = X - Y$.
2. Montrer que Y admet une espérance si et seulement si il en est de même pour X .
3. On suppose que X suit une loi exponentielle, de paramètre λ . Calculer dans ce cas l'espérance de Z .

Exercice 4

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. indépendantes et de même loi. On pose $Z_n = \text{Max}(X_1, \dots, X_n)$ et $W_n = \text{Min}(X_1, \dots, X_n)$.

1. Calculer la fonction de répartition de Z_n en fonction de celles de X_n .
2. Même question pour W_n .
3. On suppose que X_n suit une loi exponentielle de paramètre λ pour tout n . Quelle est la loi de W_n ?

Exercice 5

Si X suit une loi uniforme sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, quelle est la loi de $Y = \sin X$.

Exercice 6

Soient X_1, \dots, X_n des v.a. réelles positives et i.i.d. On note $T_n(t)$ le nombre de $X_i, i \in \{1, \dots, n\}$ qui prennent une valeur supérieure ou égale à t . Pour k entier, calculer $P(T_n(t) = k)$ en fonction de la fonction de répartition des X_1, \dots, X_n

Exercice 7

On désigne par $F_{m,\sigma}$ la fonction de répartition d'une v.a. suivant une loi normale $N(m, \sigma)$.

Exprimer $F_{m,\sigma}$ en fonction de $F_{0,\sigma}$ et $F_{0,\sigma}$ en fonction de $F_{0,1}$.

En déduire une expression de $F_{m,\sigma}$ en fonction de $F_{0,1}$.

Exercice 8

Soit une population dont la taille suit la loi normale $N(m, \sigma)$ quand l'unité utilisée est le mètre.

Quelle est la loi suivie par la taille de cette population quand l'unité est le décimètre.

Exercice 9

[Aiguille de Buffon] On lance au hasard une aiguille de longueur 1 au hasard sur un parquet dont les lames sont parallèles, la largeur d'une lame valant 1.

Quelle est la probabilité que l'aiguille chevauche une lame de parquet ?