

TD n° 7 - Exercice 9

*On suppose que la durée de vie d'une ampoule électrique est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,2 * 10^{-3} h^{-1}$.*

Si l'on remplace une ampoule par une ampoule semblable dès qu'elle ne fonctionne plus, qu'elle est la probabilité qu'au bout de 50 000 heures l'ampoule en fonctionnement soit au moins la dixième ?

Réponse : Chaque ampoule a une durée de vie X_i suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,2 * 10^{-3}$, et admet donc pour espérance $m = \frac{1}{\lambda}$ et pour écart-type $\sigma = \frac{1}{\lambda}$.

On approxime donc $\sqrt{n}\lambda(\frac{S_n}{n} - \frac{1}{\lambda})$ par $N_{0,1}$ (avec $S_n = \sum_{i=0}^n X_i$).

La probabilité qu'au bout de 50000 heures, l'ampoule soit au moins la dixième est $P(S_9 < 50000)$.
En utilisant l'approximation :

$$P(S_9 < 50000) = P(N_{0,1} < 0.6 \cdot 10^{-3} (\frac{50 \times 10^3}{9} - \frac{1}{0.2 \times 10^{-3}})) = P(N_{0,1} < \frac{1}{3}) = 0.6293$$