TD n° 8 - Exercice 4

1. On cherche à déterminer δ tel que $P(\bar{X}-\delta < \mu < \bar{X}+\delta) = P(\mu-\delta < \bar{X} < \mu+\delta) = 0,9$. Comme n est grand, on peut appliquer le *théorème central limite*, ainsi $\bar{X}$ converge en loi vers une loi normale d'espérence μ. D'autre part, comme $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{100} X_i$ et $Var(X_i) = \sigma^2\ \forall\ i$ alors $Var(\bar{X}) = \sigma^2/n$. $\bar{X}$ suit donc une loi normale $\mathcal{N}(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$.

Après centrage et réduction de la loi, on obtient : $P(\frac{(X-\mu)\sqrt{n}}{\sigma} < \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}) = \frac{0,9+1}{2}$. On trouve $\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma} = 1,65$. Avec $\sigma = 2$ et $n = 100$ on a : $\delta = 0,33$.

Au final : $P(23,32 < \mu < 23,98) = 0,9$.

2. Soit A l'évènement "la tige est utilisable". On cherche $P(A) = P(22,65 < X < 24,65)$ sachant que X suit une loi normale $\mathcal{N}(23,65; 2)$. Après centrage et réduction de la loi, on obtient : $P(A) = 2P(Y < 1/2) - 1$ avec $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$. On trouve P(A)=0,38.