TD n° 8 : Estimation, tests d'hypothèses

Exercice 1

Le but de ce problème est de montrer que, dans le cas particulier de la loi continue uniforme, la moyenne n'est pas le meilleur estimateur de l'espérance mathématique.

Soit une variable aléatoire X, uniformément répartie sur l'intervalle $[0, 2a]$. La densité de probabilité est donc $\frac{1}{2a}$ et on rappelle qu'alors :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{2a} \frac{x}{2a}dx = a$$

et

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 f(x)dx = \int_0^{2a} \frac{(x-a)^2}{2a}dx = \frac{a^2}{3}$$

On considère une suite $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de n variables aléatoires de même loi que X et indépendantes.

1. On pose
$$\overline{X} = M_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$$
Montrer que $E(M_n) = a$ et $Var(M_n) = \frac{a^2}{3n}$.
2. On pose $T_n = max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Soit $x \in [0, 2a]$. En utilisant la propriété $T_n \leq x \rightarrow \forall i$, $X_i \leq x$, calculer $P(T_n \leq x)$.
Puis montrer que la densité de probabilité de la variable aléatoire T_n est $g_n(x) = \frac{n}{2a}(\frac{x}{2a})^{n-1}$.
Calculer $E(T_n)$ et $Var(T_n)$.
3. Déduire de ce qui précède que $U_n = \frac{n+1}{2n}T_n$ est un estimateur de l'espérance mathématique a non biaisé et dont l'efficacité est meilleure que celle de la moyenne.

Exercice 2

D'après les dossiers de la gendarmerie, 140 accidents ont eu lieu en 1998 sur le territoire de la commune Y, avec la répartition suivante en fonction du jour de la semaine :

Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi	Samedi	Dimanche
12	22	14	12	16	28	36

Peut-on en conclure que les “chances” d'avoir un accident ne dépendent pas du jour de la semaine ?

Exercice 3

Une administration effectue une enquète sur le fonctionnement de ses guichets. Un guichet témoin a été testé pendant une journée continue de 8 heures, et on a observé notamment la longueur de la file d'attente. On a relevé la longueur de la file toutes les 5 minutes, avec les résultats suivants :

File d'attente	vide	1 client	2 clients	3 clients	4 clients	$\geq$ 5 clients
Nombre d'observations	29	36	25	2	3	0

On définit la variable aléatoire X =longueur de la file d'attente. Calculer une estimation de l'espérance mathématique $E(x)$. Utiliser le test du χ^2 au seuil des 5% pour tester l'hypothèse H_0 =”la variable aléatoire X obéit à une loi de Poisson”.

Exercice 4

Un générateur de nombres entiers compris entre 0 et 9 a produit les résultats suivants :

0	599963005		1	600033260		2	599999169		3	600000243
4	599957439		5	600017176		6	600016588		7	600009044
8	599987038		9	600017038						

Effectuez un test d'ajustement à la loi uniforme sur $\{0, 1, \cdots, 9\}$. Q'en déduisez-vous ?

Exercice 5

Dans un établissement de construction mécanique, une machine produit en série des tiges métalliques dont la longueur X, par suite d'imperfections dues au fonctionnement de la machine, est une v.a. gaussienne d'espérance μ et de variance σ^2. On suppose que $\sigma = 2mm$.

1. On mesure 100 tiges et on trouve une moyenne empirique $\overline{X} = 23.65$ mm. Construire l'intervalle de confiance de μ au niveau 90%.
2. Pour qu'une tige soit utilisable, il faut que sa longueur soit comprise entre $22,65$ mm et $24,65$ mm. En supposant que $\mu = 23,65$, calculer la probabilité qu'une tige soit utilisable.