

- soit $H_0 : a = 0$
- soit $H_1 : a > 0$.

Une stratégie qui se dessine irrésistiblement serait de se fixer un seuil s et ensuite accepter H_0 si le minimum de l'échantillon est inférieur à s ; si le minimum le dépasse on rejette H_0 en faveur de H_1 .

Quelle que soit la décision, elle peut comporter deux risques :

- Rejeter H_0 , alors qu'elle est vraie (risque de première espèce).
- Accepter H_0 , alors qu'elle est fautive (risque de deuxième espèce).

Il n'est pas possible de minimiser ces deux risques simultanément. La méthode classique consiste à favoriser H_0 en fixant une borne à ne pas dépasser pour l'erreur de première espèce : la probabilité du rejet H_0 , lorsqu'elle est vraie ne doit pas dépasser un certain seuil α .

2

Tests d'Hypothèses

La problématique des tests statistiques se distingue de celle de l'estimation par le fait qu'elle ne s'intéresse pas à la valeur exacte du paramètre inconnu ; elle cherche à déterminer si le paramètre satisfait ou pas certaines hypothèses données. A titre d'exemple, on peut considérer le cas d'un institut de sondage qui, disposant d'un échantillon, souhaite faire certaines prévisions sur la probabilité qu'un candidat à l'élection batte les autres sans se préoccuper dans un premier temps du chiffre exact de la cote de sa popularité.

Exemple. Soit X une v.a. uniformément répartie dans l'intervalle $[a, 1]$, où a est inconnu, mais on sait que $0 \leq a < 1$. Disposant d'un échantillon (x_1, \dots, x_n) , on souhaite d'établir une règle qui, en fonction de celui-ci, décide :

1

1. $H_0 : \theta \in \Theta_0$ et
2. $H_1 : \theta \in \Theta_1$.

Lorsque Θ_0 se réduit à un seul élément, l'hypothèse H_0 est appelée *hypothèse nulle*.

Un test statistique dans ce contexte, est une stratégie associant à un échantillon (x_1, \dots, x_n) une des hypothèses H_0 ou H_1 . C'est donc une famille d'applications de \mathbb{R}^n dans l'ensemble $\{H_0, H_1\}$.

Le risque de première espèce et le risque de deuxième espèce se définissent, dans le cas général, par les deux probabilités données ci-dessus. Un seuil α à ne pas franchir pour le premier risque est imposé ; c'est la probabilité maximale du rejet de H_0 lorsqu'elle est vraie.

4

On peut, de façon tout à fait équivalente, considérer $\beta = 1 - \alpha$, ce qui est la probabilité d'accepter H_0 , lorsqu'elle est vraie ; c'est donc le seuil de confiance que l'on accorde à H_0 . Traditionnellement, la valeur de α est choisie dans l'intervalle. $[0,01, 0,1]$.

Définitions. Soit X une v.a. dont la loi dépend d'un paramètre inconnu θ . Soit Θ l'ensemble des valeurs possibles que θ peut prendre (en général un sous-ensemble de \mathbb{R}^k), appelé *espace du paramètre*. Il est divisé en deux sous-ensembles disjoints et non vides :

$$\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1.$$

On associe alors à ces deux régions les hypothèses :

3

On en déduit que le risque de première espèce est majoré par α , si

$$(1 - s)^n \leq \alpha.$$

Et pour cela le choix de $s = 1 - \alpha^{1/n}$ convient.

Quelques Tests Standard

Nous n'entrons pas ici dans une théorie des tests statistiques, et nous nous suffirons dans la suite de l'introduction de quelques tests courants fréquemment sollicités dans les inférences statistiques. Les théorèmes, justifiant leur application, sont admis sans démonstration.

Test du Khi-deux d'Ajustement

Soit X une v.a. prenant valeur dans l'ensemble $\{a_1, \dots, a_k\}$. Nous voulons tester l'hypothèse nulle :

6

La puissance d'un test, respectant le seuil α , est mesurée en termes de probabilité du rejet de H_0 , lorsqu'elle est fausse.

On peut remplacer la donnée de α par celle de $\beta = 1 - \alpha$, appelé *niveaux de confiance* de H_0 .

Un test pour l'exemple précédent. Étant donné un seuil α à ne pas dépasser pour le risque de première espèce, cherchons une frontière s pour le minimum de l'échantillon. Rappelons que la stratégie consistait à retenir H_0 si le minimum de l'échantillon ne dépassait pas s et la rejeter sinon. Calculons alors la probabilité de son rejet, lorsqu'elle est vraie. Celle-ci n'est que la probabilité pour que le minimum, dans un n -échantillon de v.a. uniformément répartie dans l'intervalle $[0, 1]$, dépasse s ; ce qui vaut $(1 - s)^n$.

5

Nous avons déjà utilisé le vecteur f_n comme estimateur standard du vecteur de p de distribution. Introduisons maintenant une mesure d'écart entre les fréquences théoriques et les fréquences observées, appelée *Khi-deux d'ajustement*, par :

$$\chi_n^2(p, f_n) = n \sum_{i=1}^k \frac{[p(i) - f_n(i)]^2}{p(i)}.$$

Nous avons alors :

Théorème. Sous l'hypothèse nulle H_0 , la suite $\chi_n^2(p, f_n)$ converge en loi, lorsque $n \rightarrow \infty$, vers une v.a. du Khi-deux à $k - 1$ degrés de liberté.

Exemple. On a procédé à 120 lancers d'un même dé. Les résultats sont donnés dans le tableau suivant :

8

H_0 : la distribution de probabilité est le vecteur $p = (p(1), \dots, p(k))$
contre l'alternative :

H_1 : elle est différente du vecteur p .

Étant donné un échantillon (x_1, \dots, x_n) , définissons la *fréquence observée* de a_i par :

$$N(i) = \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{\{a_j\}}(x_j), \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, k.$$

C'est la fréquence d'observations de a_i dans l'échantillon. Définissons, par ailleurs, la *fréquence relative* de a_i par :

$$f_n(i) = \frac{N(i)}{n}, \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, k.$$

7

Remarque. Dans l'application du test d'ajustement du Khi-deux, il faut veiller toutefois à ce que les fréquences théoriques $np^{(i)}$ ne soient pas trop faibles, 5 étant considéré comme la limite inférieure traditionnelle. Si besoin est, on peut regrouper plusieurs valeurs dans une seule classe, afin de réaliser cette exigence. Cette technique permet d'appliquer ce test à toutes les v.a. discrètes prenant valeurs dans un ensemble fini ou infini.

Test du Khi-deux d'Indépendance

Soient X et Y deux v.a. prenant valeurs dans les ensembles $\{a_1, \dots, a_k\}$ et $\{b_1, \dots, b_l\}$ respectivement, où k et l sont deux entiers positifs quelconques (distincts ou égaux). En dehors de cette confirmation, rien n'est connu sur ces v.a.

10

| | | | | | | |
|-----------|----|----|----|----|----|----|
| Face | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Fréquence | 14 | 16 | 28 | 30 | 18 | 14 |

Ce dé est-il pipé ? (On donnera la réponse avec un niveau de confiance $\beta = 0.95$).

Solution. Dans ce problème, la v.a. prend valeurs dans $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et l'hypothèse nulle H_0 est celle de la distribution $p_1 = p_2 = \dots = p_6 = \frac{1}{6}$. On calcule le Khi-deux d'ajustement :

$$\chi_n^2(p, f_n) \approx 12.8.$$

Or, la table de la loi du Khi-deux indique que, pour le χ^2 à $5 = 6 - 1$ degrés de liberté, on ne doit pas dépasser la valeur de 11.1 au niveau de confiance 0.95. On rejette donc l'hypothèse d'uniformité du dé, en retenant qu'il est pipé.

9

Ces fréquences sont dites relatives lorsqu'on les divise par la taille n de l'échantillon. Désignons-les par N_{ij}^t , M_i^t et L_j^t respectivement. Si l'on retient l'hypothèse d'indépendance, N_{ij}^t doit être "proche" de $M_i^t \cdot L_j^t$. Introduisons maintenant une mesure d'écart entre les fréquences observées et ces produits, appelée *Khi-deux d'indépendance*, en posant :

$$\chi_n^2(N^t, M^t L^t) = n \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \frac{[N_{ij}^t - M_i^t L_j^t]^2}{N_{ij}^t}.$$

Nous avons alors :

Théorème. Sous l'hypothèse d'indépendance (H_0), la suite $\chi_n^2(N^t, M^t L^t)$, introduite ci-dessus, converge en loi, lorsque $n \rightarrow \infty$, vers une v.a. du Khi-deux à $(k-1)(l-1)$ degrés de liberté.

12

Nous souhaitons tester l'hypothèse :

H_0 : X et Y sont indépendantes

contre l'alternative :

H_1 : elles ne sont pas indépendantes.

Disposant d'un échantillon d'observations du couple (X, Y) :

$$((x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)),$$

on définit les fréquences observées conjointes et marginales dans l'échantillon par :

- $N_{ij}^n = \sum_{h=1}^n \mathbf{1}_{\{(a_i, b_j)\}}(x_h, y_h)$; c'est la fréquence d'observations du couple (a_i, b_j) .
- $M_i^n = \sum_{h=1}^n \mathbf{1}_{\{a_i\}}(x_h)$; c'est la fréquence d'observations de a_i .
- $L_j^n = \sum_{h=1}^n \mathbf{1}_{\{b_j\}}(y_h)$; c'est la fréquence d'observations de b_j .

11

Solution. Il s'agit de tester l'indépendance de deux v.a. (l'âge et le nombre d'accidents). Le théorème précédent s'applique avec $k = l = 3$. On calcule alors le Khi-deux d'indépendance. Il vient $\chi_n^2(N^i, M^jL) \approx 16.51$. Nous sommes donc ramenés à rejeter l'hypothèse d'indépendance (H_0) au niveau de confiance 0.95. En effet la table de la loi de Khi-deux indique que, pour le χ^2 de $4 = (3 - 1) \times (3 - 1)$ degrés de liberté, on dépasse la valeur 9.48 avec une probabilité ≤ 0.05 .

Test de Student

Le problème de décider si l'espérance d'une v.a. normale, est égale ou pas à une grandeur donnée se pose souvent en statistique. Dans la suite, nous considérons une v.a. X normale d'espérance μ et de variance σ , toutes deux inconnues. On se donne une valeur a .

14

Exemple (J. Istas). 300 conducteurs sont classifiés suivant leur âge et le nombre d'accidents qu'ils ont subis pendant les deux dernières années. Les résultats sont donnés dans le tableau suivant :

| Age / Nombre d'accidents | 0 | 1 ou 2 | 3 ou plus |
|--------------------------|----|--------|-----------|
| ≤ 21 | 8 | 23 | 14 |
| $[22, 26[$ | 21 | 42 | 12 |
| ≥ 27 | 71 | 90 | 19 |

L'âge des conducteurs et le nombre d'accidents subis sont-ils indépendants ? (On donnera la réponse avec un niveau de confiance $\beta = 0.95$).

13

Théorème

- Sous l'hypothèse H_0 , on a $Z_n = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n}$ et Z_n suit une loi de Student à $n - 1$ degrés de liberté.
- Sous l'hypothèse H_1 , on a $Z_n = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n} + \sqrt{n} \frac{\mu - a}{S_n}$ et Z_n croît en valeur absolue avec n .

On en déduit alors la règle de décision suivante. Soit α le seuil de risque de première espèce à ne pas dépasser. Alors on calcule Z_n . Soit $t_{\alpha/2}(n - 1)$ la valeur dont la probabilité de dépassement dans la loi de Student à $n - 1$ degrés de liberté vaut $\alpha/2$. Alors :

1. Si $|Z_n|$ ne dépasse pas $t_{\alpha/2}(n - 1)$, alors on choisit H_0 .
2. Sinon on choisit H_1 .

16

Nous voulons tester :

$$H_0 : \mu = a$$

contre l'alternative :

$$H_1 : \mu \neq a.$$

Désignons par \bar{X}_n et S_n les estimateurs standard de μ et de σ respectivement. Posons :

$$Z_n = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - a}{S_n}.$$

Nous avons alors :

15

Exemple (J. Istas). Un fabricant de piles électriques affirme que la durée moyenne du matériel qu'il produit est de 170h. On prélève un échantillon de 30 piles et on observe une durée de vie moyenne de 155h et une variance empirique $S = 30h^2$. Que peut-on penser de la confirmation du fabricant (en supposant que la durée de vie est une v.a. normale d'espérance et de variance inconnues) ?

Solution. Soit μ l'espérance de la durée de vie d'une pile. D'après le théorème précédent, $\sqrt{30} \frac{\bar{X}_n - \mu}{S}$ suit une loi de Student $t(29)$. Un calcul simple donne la valeur approximative -2.74 à cet écart. Or, suivant une table de la loi de Student, pour un seuil $\alpha = 0.02$, $t(29)$ ne doit pas dépasser en valeur absolue 2.518. Il y a donc une bonne raison pour rejeter l'affirmation du fabricant.

Remarques

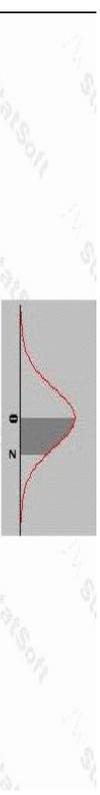
1. Le test précédent n'est pas un test asymptotique et peut s'appliquer aussi pour des valeurs relativement peu élevées de n .
2. Si n tend vers l'infini, la loi de Student à n degrés de liberté tend vers une loi normale centrée-réduite. Traditionnellement, lorsque $n \geq 30$, on remplace l'écart dans la loi de Student par celui dans la loi normale.
3. Si nous voulons tester $H_0 : \mu \leq a$ contre l'alternative $H_1 : \mu > a$, la région d'acceptation de H_0 sera :

$$\bar{X}_n \in] -\infty, a + t_{\alpha/2}(n-1) \frac{S_n}{\sqrt{n}}]$$

De façon similaire, on peut tester $H_0 : \mu \geq a$ contre l'alternative

$$H_1 : \mu < a$$

| | | | | | | | | | | |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1.1 | 0.3643 | 0.3665 | 0.3686 | 0.3708 | 0.3729 | 0.3749 | 0.3770 | 0.3790 | 0.3810 | 0.3830 |
| 1.2 | 0.3849 | 0.3869 | 0.3888 | 0.3907 | 0.3925 | 0.3944 | 0.3962 | 0.3980 | 0.3997 | 0.4015 |
| 1.3 | 0.4032 | 0.4049 | 0.4066 | 0.4082 | 0.4099 | 0.4115 | 0.4131 | 0.4147 | 0.4162 | 0.4177 |
| 1.4 | 0.4192 | 0.4207 | 0.4222 | 0.4236 | 0.4251 | 0.4265 | 0.4279 | 0.4292 | 0.4306 | 0.4319 |
| 1.5 | 0.4332 | 0.4345 | 0.4357 | 0.4370 | 0.4382 | 0.4394 | 0.4406 | 0.4418 | 0.4429 | 0.4441 |
| 1.6 | 0.4452 | 0.4463 | 0.4474 | 0.4484 | 0.4495 | 0.4505 | 0.4515 | 0.4525 | 0.4535 | 0.4545 |
| 1.7 | 0.4554 | 0.4564 | 0.4573 | 0.4582 | 0.4591 | 0.4599 | 0.4608 | 0.4616 | 0.4625 | 0.4633 |
| 1.8 | 0.4641 | 0.4649 | 0.4656 | 0.4664 | 0.4671 | 0.4678 | 0.4686 | 0.4693 | 0.4699 | 0.4706 |
| 1.9 | 0.4713 | 0.4719 | 0.4726 | 0.4732 | 0.4738 | 0.4744 | 0.4750 | 0.4756 | 0.4761 | 0.4767 |
| 2.0 | 0.4772 | 0.4778 | 0.4783 | 0.4788 | 0.4793 | 0.4798 | 0.4803 | 0.4808 | 0.4812 | 0.4817 |
| 2.1 | 0.4821 | 0.4826 | 0.4830 | 0.4834 | 0.4838 | 0.4842 | 0.4846 | 0.4850 | 0.4854 | 0.4857 |
| 2.2 | 0.4861 | 0.4864 | 0.4868 | 0.4871 | 0.4875 | 0.4878 | 0.4881 | 0.4884 | 0.4887 | 0.4890 |
| 2.3 | 0.4893 | 0.4896 | 0.4898 | 0.4901 | 0.4904 | 0.4906 | 0.4909 | 0.4911 | 0.4913 | 0.4916 |
| 2.4 | 0.4918 | 0.4920 | 0.4922 | 0.4925 | 0.4927 | 0.4929 | 0.4931 | 0.4932 | 0.4934 | 0.4936 |
| 2.5 | 0.4938 | 0.4940 | 0.4941 | 0.4943 | 0.4945 | 0.4946 | 0.4948 | 0.4949 | 0.4951 | 0.4952 |
| 2.6 | 0.4953 | 0.4955 | 0.4956 | 0.4957 | 0.4959 | 0.4960 | 0.4961 | 0.4962 | 0.4963 | 0.4964 |
| 2.7 | 0.4965 | 0.4966 | 0.4967 | 0.4968 | 0.4969 | 0.4970 | 0.4971 | 0.4972 | 0.4973 | 0.4974 |



| | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.0 | 0.0000 | 0.0040 | 0.0080 | 0.0120 | 0.0160 | 0.0199 | 0.0239 | 0.0279 | 0.0319 | 0.0355 |
| 0.1 | 0.0398 | 0.0438 | 0.0478 | 0.0517 | 0.0557 | 0.0596 | 0.0636 | 0.0675 | 0.0714 | 0.0753 |
| 0.2 | 0.0793 | 0.0832 | 0.0871 | 0.0910 | 0.0948 | 0.0987 | 0.1026 | 0.1064 | 0.1103 | 0.1141 |
| 0.3 | 0.1179 | 0.1217 | 0.1255 | 0.1293 | 0.1331 | 0.1368 | 0.1406 | 0.1443 | 0.1480 | 0.1517 |
| 0.4 | 0.1554 | 0.1591 | 0.1628 | 0.1664 | 0.1700 | 0.1736 | 0.1772 | 0.1808 | 0.1844 | 0.1875 |
| 0.5 | 0.1915 | 0.1950 | 0.1985 | 0.2019 | 0.2054 | 0.2088 | 0.2123 | 0.2157 | 0.2190 | 0.2224 |
| 0.6 | 0.2257 | 0.2291 | 0.2324 | 0.2357 | 0.2389 | 0.2422 | 0.2454 | 0.2486 | 0.2517 | 0.2548 |
| 0.7 | 0.2580 | 0.2611 | 0.2642 | 0.2673 | 0.2704 | 0.2734 | 0.2764 | 0.2794 | 0.2823 | 0.2853 |
| 0.8 | 0.2881 | 0.2910 | 0.2939 | 0.2967 | 0.2995 | 0.3023 | 0.3051 | 0.3078 | 0.3106 | 0.3133 |
| 0.9 | 0.3139 | 0.3186 | 0.3212 | 0.3238 | 0.3264 | 0.3289 | 0.3315 | 0.3340 | 0.3365 | 0.3385 |
| 1.0 | 0.3413 | 0.3438 | 0.3461 | 0.3485 | 0.3508 | 0.3531 | 0.3554 | 0.3577 | 0.3599 | 0.3621 |

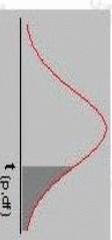
| | | | | | | | | | | | | | |
|----|--------|--------|--------|---------|---------|---------|----------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 11 | 2.6822 | 3.0348 | 3.3155 | 4.5748 | 5.5778 | 7.5844 | 10.5400 | 13.7009 | 17.2701 | 19.6514 | 21.9205 | 24.7247 | 26.7565 |
| 12 | 3.0783 | 3.5707 | 4.4039 | 5.2803 | 6.3080 | 8.4842 | 11.3402 | 14.8540 | 18.5495 | 21.0267 | 23.3366 | 26.2167 | 28.2992 |
| 13 | 3.3633 | 4.1092 | 5.0073 | 5.8918 | 7.0419 | 9.2907 | 12.3976 | 15.9391 | 19.8193 | 22.3603 | 24.7560 | 27.6823 | 29.9147 |
| 14 | 4.0747 | 4.6603 | 5.6273 | 6.5703 | 7.7893 | 10.1631 | 13.3327 | 17.1183 | 21.0644 | 23.6849 | 26.1193 | 29.1424 | 31.3193 |
| 15 | 4.6092 | 5.2295 | 6.2614 | 7.2004 | 8.5467 | 11.0364 | 14.3386 | 18.2409 | 22.3071 | 24.9979 | 27.4839 | 30.5791 | 32.8012 |
| 16 | 5.1421 | 5.8121 | 6.9076 | 7.9615 | 9.3224 | 11.9122 | 15.33830 | 19.3686 | 23.5413 | 26.2962 | 28.6435 | 31.9999 | 34.2679 |
| 17 | 5.6722 | 6.4077 | 7.5649 | 8.6716 | 10.0319 | 12.7919 | 16.33818 | 20.4888 | 24.7694 | 27.3711 | 30.1910 | 33.4066 | 35.7187 |
| 18 | 6.2640 | 7.0149 | 8.2305 | 9.3906 | 10.644 | 13.6729 | 17.3390 | 21.6489 | 25.9842 | 28.6930 | 31.5263 | 34.8023 | 37.1545 |
| 19 | 6.8497 | 7.6273 | 8.9052 | 10.1101 | 11.6309 | 14.5620 | 18.3395 | 22.7181 | 27.2037 | 30.1433 | 32.8223 | 36.1907 | 38.5226 |
| 20 | 7.4334 | 8.2604 | 9.5908 | 10.8301 | 12.4261 | 15.4517 | 19.3343 | 23.8209 | 28.4198 | 31.4043 | 34.1691 | 37.5623 | 39.9065 |



Right tail areas for the Chi-square Distribution

| df | .995 | .990 | .975 | .950 | .900 | .750 | .500 | .250 | .100 | .050 | .025 | .010 | .005 |
|----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1 | 0.0004 | 0.0006 | 0.0008 | 0.0033 | 0.0157 | 0.1013 | 0.4549 | 1.3233 | 2.7054 | 3.8414 | 5.0239 | 6.6309 | 7.8794 |
| 2 | 0.0100 | 0.0201 | 0.0504 | 0.1029 | 0.2107 | 0.5756 | 1.3862 | 2.7729 | 4.6051 | 5.9914 | 7.3776 | 9.2104 | 10.5963 |
| 3 | 0.0717 | 0.1143 | 0.2180 | 0.3515 | 0.5847 | 1.2123 | 2.3697 | 4.1083 | 6.2519 | 7.8147 | 9.3480 | 11.3449 | 12.8316 |
| 4 | 0.2069 | 0.2971 | 0.4842 | 0.7107 | 1.0692 | 1.9226 | 3.3569 | 5.3857 | 7.7794 | 9.4873 | 11.1429 | 13.2760 | 14.8606 |
| 5 | 0.4114 | 0.5480 | 0.8321 | 1.1458 | 1.6031 | 2.6740 | 4.3516 | 6.6258 | 9.2363 | 11.0705 | 12.8320 | 15.0827 | 16.7490 |
| 6 | 0.6753 | 0.8729 | 1.2374 | 1.6358 | 2.2043 | 3.4540 | 5.3481 | 7.8480 | 10.6444 | 12.5919 | 14.4538 | 16.8118 | 18.5478 |
| 7 | 0.9893 | 1.2904 | 1.6897 | 2.1675 | 2.8331 | 4.2485 | 6.3481 | 9.0315 | 12.0170 | 14.0671 | 16.0126 | 18.4731 | 20.2774 |
| 8 | 1.3444 | 1.6430 | 2.1793 | 2.7364 | 3.4854 | 5.0706 | 7.3412 | 10.2185 | 13.3617 | 15.5073 | 17.5345 | 20.0924 | 21.9405 |
| 9 | 1.7343 | 2.0279 | 2.7039 | 3.3211 | 4.1616 | 5.8983 | 8.3423 | 11.3875 | 14.6836 | 16.9188 | 19.0277 | 21.6699 | 23.5835 |
| 10 | 2.1536 | 2.5321 | 3.2467 | 3.9450 | 4.8518 | 6.7570 | 9.3412 | 12.5486 | 15.9878 | 18.3074 | 20.4831 | 22.3022 | 25.1881 |

| | | | | | | | | |
|----|----------|----------|----------|----------|---------|---------|---------|--------|
| 11 | 0.259556 | 0.697445 | 1.363430 | 1.795885 | 2.20099 | 2.71808 | 3.10581 | 4.4370 |
| 12 | 0.259033 | 0.695483 | 1.356217 | 1.782288 | 2.17881 | 2.68100 | 3.05454 | 4.3178 |
| 13 | 0.258591 | 0.693829 | 1.350171 | 1.770933 | 2.16037 | 2.65031 | 3.01228 | 4.2208 |
| 14 | 0.258213 | 0.692417 | 1.345030 | 1.761310 | 2.14479 | 2.62449 | 2.97684 | 4.1405 |
| 15 | 0.257885 | 0.691197 | 1.340606 | 1.753050 | 2.13145 | 2.60248 | 2.94671 | 4.0728 |
| 16 | 0.257599 | 0.690132 | 1.336757 | 1.745884 | 2.11991 | 2.58249 | 2.92078 | 4.0150 |
| 17 | 0.257347 | 0.689195 | 1.333379 | 1.739607 | 2.10982 | 2.56693 | 2.89823 | 3.9651 |
| 18 | 0.257123 | 0.688364 | 1.330391 | 1.734064 | 2.10092 | 2.55238 | 2.87844 | 3.9216 |
| 19 | 0.256923 | 0.687621 | 1.327728 | 1.729133 | 2.09302 | 2.53948 | 2.86093 | 3.8834 |
| 20 | 0.256743 | 0.686954 | 1.325341 | 1.724718 | 2.08596 | 2.52798 | 2.84534 | 3.8495 |



t table with right tail probabilities

| df | 0.40 | 0.25 | 0.10 | 0.05 | 0.025 | 0.01 | 0.005 | 0.0005 |
|----|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1 | 0.324920 | 1.000000 | 3.077684 | 6.313752 | 12.70620 | 31.82052 | 63.65674 | 636.6192 |
| 2 | 0.288675 | 0.816497 | 1.885618 | 2.919986 | 4.30265 | 6.96456 | 9.92484 | 31.5991 |
| 3 | 0.276671 | 0.764892 | 1.637744 | 2.353363 | 3.18245 | 4.54070 | 5.84091 | 12.9240 |
| 4 | 0.270722 | 0.740697 | 1.533206 | 2.131847 | 2.77645 | 3.74695 | 4.60409 | 8.6103 |
| 5 | 0.267181 | 0.726687 | 1.475884 | 2.015048 | 2.57058 | 3.36493 | 4.03214 | 6.8688 |
| 6 | 0.264835 | 0.717558 | 1.439756 | 1.943180 | 2.44691 | 3.14267 | 3.70743 | 5.9588 |
| 7 | 0.263167 | 0.711142 | 1.414924 | 1.894579 | 2.36462 | 2.99795 | 3.49948 | 5.4079 |
| 8 | 0.261921 | 0.706387 | 1.396815 | 1.859548 | 2.30600 | 2.89646 | 3.35539 | 5.0413 |
| 9 | 0.260955 | 0.702722 | 1.383029 | 1.833113 | 2.26216 | 2.82144 | 3.24984 | 4.7809 |
| 10 | 0.260185 | 0.699812 | 1.372184 | 1.812461 | 2.22814 | 2.76377 | 3.16927 | 4.5869 |