

**Exemple.** Soit  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  l'espace associé au tirage d'un dé à 8 faces avec la probabilité uniforme  $\frac{1}{8}$ . Soient :

$$A_1 = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$A_2 = \{1, 2, 5, 6\}$$

$$A_3 = \{3, 4, 5, 6\}$$

On a :

$$Pr(A_1 \cap A_2) = Pr(\{1, 2\}) = \frac{1}{4} = Pr(A_1)Pr(A_2)$$

$$Pr(A_1 \cap A_3) = Pr(\{3, 4\}) = \frac{1}{4} = Pr(A_1)Pr(A_3)$$

$$Pr(A_2 \cap A_3) = Pr(\{5, 6\}) = \frac{1}{4} = Pr(A_2)Pr(A_3)$$

# Indépendance

## Définitions

- Deux événements  $A$  et  $B$  sont dit *indépendants*, si :

$$Pr(A \cap B) = Pr(A)Pr(B).$$

- Une famille  $A_i, i = 1, ..., n$ , d'événements est dite *indépendante dans son ensemble*, si pour tout sous-ensemble  $J \subset \{1, ..., n\}$  :

$$Pr\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) = \prod_{i \in J} Pr(A_i).$$

**Remarque.** Pour démontrer l'indépendance d'une famille  $A_i, i = 1, ..., n$ , il ne suffit pas de prouver que les  $A_i$  sont 2-à-2 indépendants, comme le montre l'exemple suivant.

Notons tout de suite que  $B$  conditionné par  $A$  n'implique pas que  $A$  précède nécessairement  $B$  (dans l'ordre chronologique).

**Exemple.** Un dé uniforme est lancé et nous savons que le point obtenu est *pair* (événement  $A$ ). Quelle est la probabilité pour que le point soit au moins 4 (événement  $B$ ) ?

Or :

$$Pr(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = Pr(\emptyset) = 0 \neq Pr(A_1)Pr(A_2)Pr(A_3) = \frac{1}{8}.$$

\*\*\*\*\*

## Probabilités Conditionnelles

Il arrive que la donnée d'un événement modifie la probabilité initialement affectée à un autre. La notion de **probabilité conditionnelle** est introduite afin de formaliser le concept de la probabilité de l'occurrence d'un événement  $B$  sachant qu'un autre  $A$  s'est produit.

Nous avons alors :

$$Pr(A \cap B) = Pr(B/A)Pr(A).$$

Nous disons alors que l'on a effectué un conditionnement par  $A$ .

Dans le cas où  $Pr(A) \neq 0$ , l'indépendance de  $A$  et  $B$  est équivalente à  $Pr(B/A) = Pr(B)$  ; ce qui est en accord avec sa définition intuitive

**Proposition.** Le couple  $(A, Pr(\cdot/A))$  est un espace probabilisé discret.

**Proposition.** Soit  $A_1, \dots, A_n$  une partition de  $\Omega$ . Si chacun de ces ensembles est de probabilité non nulle, alors :

$$Pr(B) = \sum_{i=1}^n Pr(A_i)Pr(B/A_i), \quad \forall B \in \mathcal{P}(\Omega).$$

6

## Probabilité des Causes

Soit l'événement  $B$  causé par l'un des événements  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , tous de probabilité non nulle. On connaît les probabilités  $Pr(A_i)$  de ces derniers événements et aussi les probabilités conditionnelles  $Pr(B/A_i)$ . Comment trouver les probabilités des causes sachant que  $B$  s'est produit, i.e. les probabilités  $Pr(A_i/B)$  ?

**Théorème (Formule de Bayes).** Soit  $A_1, \dots, A_n$  une partition de  $\Omega$  telle que  $Pr(A_i) \neq 0, \forall i = 1, \dots, n$ . Soit  $B$  un événement de probabilité non nulle. Nous avons :

$$Pr(A_i/B) = \frac{Pr(A_i)Pr(B/A_i)}{\sum_{i=1}^n Pr(A_i)Pr(B/A_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

8

Il est clair que le nouvel espace (conditionné par l'événement  $A$ ) sur lequel les événements élémentaires sont à définir est  $\Omega' = A$ , qui contient 3 éléments. Or, la portion de  $A$  qui est en même temps favorable à  $B$  en contient 2. Il est donc raisonnable de définir la probabilité de  $B$  conditionné par  $A$  par le ratio  $\frac{2}{3}$  (à comparer avec  $Pr(B) = \frac{1}{2}$ ).

**Définitions.** Soit  $(\Omega, Pr)$  un espace probabilisé discret et soit  $A$  un événement de probabilité non nulle. On définit sur  $\mathcal{P}(\Omega)$ , l'application  $Pr(\cdot/A)$  à valeurs dans  $[0, 1]$  par :

$$Pr(B/A) = \frac{Pr(A \cap B)}{Pr(A)}, \quad \forall B \in \mathcal{P}(\Omega).$$

On appelle  $Pr(B/A)$  probabilité conditionnelle de  $B$  sachant  $A$  (ou probabilité de  $B$  sachant  $A$ ).

5

**Exemple.** On lance deux dés uniformes.

- Quelle est la probabilité d'avoir obtenu un double sachant que la somme des points vaut 8 ?
- Quelle est la probabilité d'avoir obtenu un double sachant que la somme des points vaut au moins 10 ?

**Solution :** Chacune de ces probabilités conditionnelles est définie par une fraction dont le numérateur est la probabilité de l'intersection et le dénominateur celle de la condition. On trouve facilement :

- $Pr(\text{double}/S = 8) = \frac{1/36}{5/36} = \frac{1}{5}$ .
- $Pr(\text{double}/S \geq 10) = \frac{2/36}{6/36} = \frac{1}{3}$ .

7

**Exemple** (F. Dress). Dans un jeu télévisé, un candidat doit choisir une question de repêchage en tirant au hasard parmi 3 papiers. Il y a :

- une question facile avec 3 chances sur 4 de donner la réponse correcte,
- une question moyenne avec 2 chances sur 5 de donner la réponse correcte, et
- une question difficile avec 1 chance sur 5 de donner la réponse correcte.

Sachant que le candidat a donné la réponse **correcte**, quelle est la probabilité pour qu'il s'agisse de la question **facile** ?

10

## Loi Conjointe

Dans la suite, nous considérons un couple de v.a., mais l'étude s'étend à un nombre quelconque de v.a.

**Définitions.** Soient  $X$  et  $Y$  deux v.a. réelles sur le même espace  $\Omega$ . Le couple  $(X, Y)$  peut être considéré comme un **vecteur** aléatoire sur  $\Omega$ . Sa loi est appelée *loi conjointe* de  $(X, Y)$ . La connaissance de cette dernière permet de retrouver la loi de  $X$  et celle de  $Y$  individuellement. En effet, pour tout ensemble  $A \subset X(\Omega)$  et tout ensemble  $B \subset Y(\Omega)$  :

$$Pr_1(X \in A) = Pr(X \in A, Y \in \mathbb{R})$$

et

$$Pr_2(Y \in B) = Pr(X \in \mathbb{R}, Y \in B).$$

12

En particulier, pour deux événements  $A$  et  $B$  de probabilité non nulle, nous avons :

$$Pr(A/B) = \frac{Pr(A)Pr(B/A)}{Pr(B)}.$$

- $Pr(A)$  : probabilité **a priori** de  $A$
- $Pr(A/B)$  : probabilité **a posteriori** de  $A$

9

**Solution** : Désignons par  $F$ ,  $M$  et  $D$  les événements tirage de la question facile, de la question moyenne et de la question difficile respectivement. Soit, par ailleurs, l'événement "réponse correcte" noté par  $C$ .

D'après la formule de Bayes, nous avons :

$$Pr(F/C) = \frac{Pr(F)Pr(C/F)}{Pr(C/F)Pr(F) + Pr(C/M)Pr(M) + Pr(C/D)Pr(D)},$$

ce qui vaut :

$$\frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}} = \frac{5}{9}.$$

11

- A. On reprend la pièce et on la repose sur la même face.
- B. On la relance indépendamment du premier lancer.

Les lois conjointes sont données par :

A.  $Pr(\{F, F\}) = Pr(\{P, P\}) = \frac{1}{2}$  et  $Pr(\{F, P\}) = Pr(\{P, F\}) = 0$ .

B.  $Pr(\{F, F\}) = Pr(\{P, F\}) = Pr(\{F, P\}) = Pr(\{P, P\}) = \frac{1}{4}$ .

Il s'agit donc de deux lois **distinctes**

Les lois marginales dans les deux cas sont données par :

$$Pr(\{P\}) = Pr(\{F\}) = \frac{1}{2}.$$

Pour deux lois conjointes **distinctes**, on a les **mêmes** lois marginales.

**Solution :** Soit  $X$  la v.a. associée au lancer du dé. L'événement  $A$  associé à la condition est l'ensemble  $\{1, 2, 3\}$ . La probabilité de la condition  $A$  est  $\frac{1}{2}$ . L'espérance conditionnelle recherchée vaut :

$$\mathbb{E}(X/A) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} \right] = 2.$$

$X$  et  $Y$  sont dites *indépendantes*, si pour tout ensemble  $A \subset X(\Omega)$  et tout ensemble  $B \subset Y(\Omega)$  :

$$Pr(X \in A, Y \in B) = Pr_1(X \in A)Pr_2(Y \in B).$$

Les distributions  $Pr_1$  et  $Pr_2$  sont appelées *lois marginales* du vecteur  $(X, Y)$ . Dans la suite, nous supprimons les indices de  $Pr$  lorsqu'il n'y a pas le danger de confusion. La connaissance des lois marginales **ne permet pas** de reconstruire la loi conjointe.

**Exemple.** On lance une pièce authentique une première fois. Pour le 2e lancer, on considère deux possibilités :

### Espérance Conditionnelle

Soit  $X$  une v.a. et soit  $A$  un événement de probabilité **non nulle**. L'espérance de  $X$  sachant  $A$  est définie par :

$$\mathbb{E}(X/A) = \mathbb{E}_{Pr(.|A)} X$$

ou :

$$\mathbb{E}(X/A) = \frac{1}{Pr(A)} \sum_{\omega \in A} X(\omega) Pr(\{\omega\}).$$

**Exemple.** Quelle est l'espérance d'un dé uniforme sachant que le nombre sorti est inférieur ou égal à **3** ?