

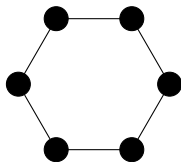
Colorier à distance 2 des graphes peu denses

Marthe Bonamy
Benjamin Lévêque
Alexandre Pinlou

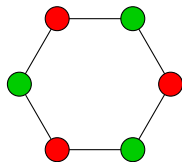
16 novembre 2011



La coloration à distance 2



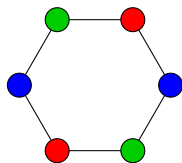
La coloration à distance 2



χ : Nombre minimum de couleurs nécessaires pour que

$$\textcircled{a} \text{---} \textcircled{b} \Rightarrow a \neq b.$$

La coloration à distance 2

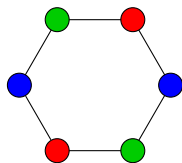


χ : Nombre minimum de couleurs nécessaires pour que

$$\textcircled{a} \text{---} \textcircled{b} \Rightarrow a \neq b.$$

χ^2 : Nombre minimum de couleurs nécessaires pour que

$$\textcircled{a} \text{---} \textcircled{b} \text{ ou } \textcircled{a} \text{---} \bigcirc \text{---} \textcircled{b} \Rightarrow a \neq b.$$



χ : Nombre minimum de couleurs nécessaires pour que

$$\textcircled{a} \text{---} \textcircled{b} \Rightarrow a \neq b.$$

χ^2 : Nombre minimum de couleurs nécessaires pour que

$$\textcircled{a} \text{---} \textcircled{b} \text{ ou } \textcircled{a} \text{---} \bigcirc \text{---} \textcircled{b} \Rightarrow a \neq b.$$

Δ : Degré maximum du graphe.

$$\chi^2 \geq \Delta + 1.$$

Un graphe est **planaire** s'il peut être représenté sur le plan sans croisement d'arête.

Conjecture (Wegner 1977)

Si G est un graphe *planaire*, alors :

- $\chi^2 \leq 7$ si $\Delta = 3$
- $\chi^2 \leq \Delta + 5$ si $4 \leq \Delta \leq 7$
- $\chi^2 \leq \lfloor \frac{3\Delta}{2} \rfloor + 1$ si $\Delta \geq 8$

Un graphe est **planaire** s'il peut être représenté sur le plan sans croisement d'arête.

Conjecture (Wegner 1977)

Si G est un graphe *planaire*, alors :

- $\chi^2 \leq 7$ si $\Delta = 3$
- $\chi^2 \leq \Delta + 5$ si $4 \leq \Delta \leq 7$
- $\chi^2 \leq \lfloor \frac{3\Delta}{2} \rfloor + 1$ si $\Delta \geq 8$

✓ C. Thomassen

ad : degré moyen = $\frac{\sum d(v)}{|V|} = \frac{2|E|}{|V|}$.

ad : degré moyen = $\frac{\sum d(v)}{|V|} = \frac{2|E|}{|V|}$.

mad : degré moyen maximum = $\max \frac{2|E(H)|}{|V(H)|}$.

ad : degré moyen = $\frac{\sum d(v)}{|V|} = \frac{2|E|}{|V|}$.

mad : degré moyen maximum = $\max \frac{2|E(H)|}{|V(H)|}$.

g : maille = longueur minimum d'un cycle.

ad : degré moyen = $\frac{\sum d(v)}{|V|} = \frac{2|E|}{|V|}$.

mad : degré moyen maximum = $\max \frac{2|E(H)|}{|V(H)|}$.

g : maille = longueur minimum d'un cycle.

Lemme (Corollaire de la Formule d'Euler)

Pour tout graphe *planaire*, $(\text{mad} - 2)(g - 2) < 4$

Des graphes peu denses

ad : degré moyen = $\frac{\sum d(v)}{|V|} = \frac{2|E|}{|V|}$.

mad : degré moyen maximum = $\max \frac{2|E(H)|}{|V(H)|}$.

g : maille = longueur minimum d'un cycle.

Lemme (Corollaire de la Formule d'Euler)

Pour tout graphe *planare*, $(\text{mad} - 2)(g - 2) < 4$

$$g \geq k, \Delta \geq d \Rightarrow \chi^2 = \Delta + 1.$$

ad : degré moyen = $\frac{\sum d(v)}{|V|} = \frac{2|E|}{|V|}$.

mad : degré moyen maximum = $\max \frac{2|E(H)|}{|V(H)|}$.

g : maille = longueur minimum d'un cycle.

Lemme (Corollaire de la Formule d'Euler)

Pour tout graphe *planaire*, $(\text{mad} - 2)(g - 2) < 4$

Dans le cas des graphes *planaires*,

$\exists k_0, \forall k \geq k_0, \exists d,$

$g \geq k, \Delta \geq d \Rightarrow \chi^2 = \Delta + 1.$

Théorème (Borodin, Ivanova, Neustroeva '08 & Ivanova '11)

Pour tout graphe *planaire*, $\chi^2 = \Delta + 1$ dans chacun des cas suivants :

- $g \geq 24$ et $\Delta \geq 3$
- $g \geq 15$ et $\Delta \geq 4$
- $g \geq 12$ et $\Delta \geq 5$
- $g \geq 10$ et $\Delta \geq 6$
- $g \geq 8$ et $\Delta \geq 10$
- $g \geq 7$ et $\Delta \geq 16$

Théorème (Borodin, Ivanova, Neustroeva '08 & Ivanova '11)

Pour tout graphe *planaire*, $\chi^2 = \Delta + 1$ dans chacun des cas suivants :

- $g \geq 24$ et $\Delta \geq 3$
- $g \geq 15$ et $\Delta \geq 4$
- $g \geq 12$ et $\Delta \geq 5$
- $g \geq 10$ et $\Delta \geq 6$
- $g \geq 8$ et $\Delta \geq 10$
- $g \geq 7$ et $\Delta \geq 16$

Théorème (Dolama, Sopena '05)

Pour tout graphe, si $\Delta \geq 4$ et $\text{mad} < \frac{16}{7}$, alors $\chi^2 = \Delta + 1$.

Théorème (Borodin, Ivanova, Neustroeva '08 & Ivanova '11)

Pour tout graphe *planaire*, $\chi^2 = \Delta + 1$ dans chacun des cas suivants :

- $g \geq 24$ et $\Delta \geq 3$
- $g \geq 15$ et $\Delta \geq 4$
- $g \geq 12$ et $\Delta \geq 5$
- $g \geq 10$ et $\Delta \geq 6$
- $g \geq 8$ et $\Delta \geq 10$
- $g \geq 7$ et $\Delta \geq 16$

Théorème (Dolama, Sopena '05)

Pour tout graphe, si $\Delta \geq 4$ et $\text{mad} < \frac{16}{7}$, alors $\chi^2 = \Delta + 1$.

$\rightsquigarrow g \geq 16$

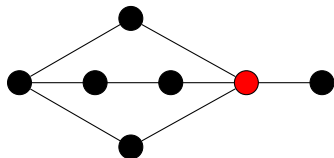
Théorème

Pour tout graphe, si $\Delta \geq 4$ et $\text{mad} < \frac{7}{3}$, alors $\chi^2 = \Delta + 1$.

Théorème

Pour tout graphe, si $\Delta \geq 4$ et $\text{mad} < \frac{7}{3}$, alors $\chi^2 = \Delta + 1$.

La borne supérieure sur mad est optimale.

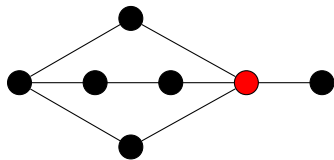


$$\Delta = 4.$$

Théorème

Pour tout graphe, si $\Delta \geq 4$ et $\text{mad} < \frac{7}{3}$, alors $\chi^2 = \Delta + 1$.

La borne supérieure sur mad est optimale.

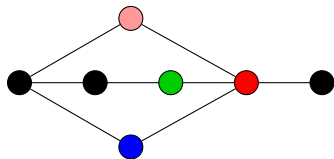


$$\Delta = 4.$$
$$\text{mad} = \frac{7}{3}.$$

Théorème

Pour tout graphe, si $\Delta \geq 4$ et $\text{mad} < \frac{7}{3}$, alors $\chi^2 = \Delta + 1$.

La borne supérieure sur mad est optimale.

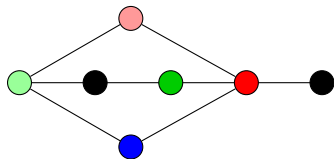


$$\begin{aligned}\Delta &= 4. \\ \text{mad} &= \frac{7}{3}. \\ \chi^2 &= 6.\end{aligned}$$

Théorème

Pour tout graphe, si $\Delta \geq 4$ et $\text{mad} < \frac{7}{3}$, alors $\chi^2 = \Delta + 1$.

La borne supérieure sur mad est optimale.



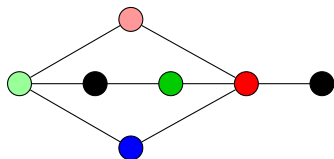
$$\begin{aligned}\Delta &= 4. \\ \text{mad} &= \frac{7}{3}. \\ \chi^2 &= 6.\end{aligned}$$

Théorème

Pour tout graphe, si $\Delta \geq 4$ et $\text{mad} < \frac{7}{3}$, alors $\chi^2 = \Delta + 1$.

$\rightsquigarrow g \geq 14$

La borne supérieure sur mad est optimale.



$$\begin{aligned}\Delta &= 4. \\ \text{mad} &= \frac{7}{3}. \\ \chi^2 &= 6.\end{aligned}$$

$$mad < m, \Delta \geq d \Rightarrow \chi^2 = \Delta + 1.$$

$$M \text{ maximal} \mid \forall m < M, \exists d, \\ mad < m, \Delta \geq d \Rightarrow \chi^2 = \Delta + 1.$$

$$M \text{ maximal} \mid \forall m < M, \exists d, \\ mad < m, \Delta \geq d \Rightarrow \chi^2 = \Delta + 1.$$

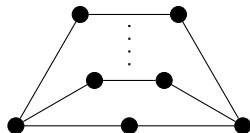
Théorème

Pour ϵ suffisamment petit, $mad < \frac{14}{5} - \epsilon$ et $\Delta \geq \mathcal{O}(\frac{1}{\epsilon}) \Rightarrow \chi^2 = \Delta + 1$.

M maximal | $\forall m < M, \exists d,$
 $mad < m, \Delta \geq d \Rightarrow \chi^2 = \Delta + 1.$

Théorème

Pour ϵ suffisamment petit, $mad < \frac{14}{5} - \epsilon$ et $\Delta \geq \mathcal{O}(\frac{1}{\epsilon}) \Rightarrow \chi^2 = \Delta + 1.$

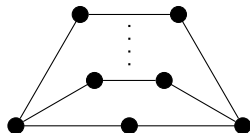


$$\begin{aligned}\Delta &= p. \\ mad &= 3 - \frac{5}{2p+1}. \\ \chi^2 &= \Delta + 2.\end{aligned}$$

M maximal | $\forall m < M, \exists d,$
 $mad < m, \Delta \geq d \Rightarrow \chi^2 = \Delta + 1.$

Théorème

Pour ϵ suffisamment petit, $mad < \frac{14}{5} - \epsilon$ et $\Delta \geq \mathcal{O}(\frac{1}{\epsilon}) \Rightarrow \chi^2 = \Delta + 1.$



Que se passe-t-il entre $\frac{14}{5}$ et 3 ?

$$\begin{aligned}\Delta &= p. \\ mad &= 3 - \frac{5}{2p+1}. \\ \chi^2 &= \Delta + 2.\end{aligned}$$

Corollaire

Pour tout graphe *planaire*, $\chi^2 = \Delta + 1$ dans chacun des cas suivants:

- $g(G) \geq 12$ et $\Delta(G) \geq 5$
- $g(G) \geq 10$ et $\Delta(G) \geq 6$
- $g(G) \geq 9$ et $\Delta(G) \geq 10$ 9

$$mad < m \Rightarrow \chi^2 \leq \Delta + C.$$

M maximal | $\forall m < M, \exists C,$
 $mad < m \Rightarrow \chi^2 \leq \Delta + C.$

M maximal | $\forall m < M, \exists C,$
 $mad < m \Rightarrow \chi^2 \leq \Delta + C.$

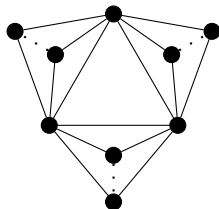
Théorème

Pour tout $\epsilon > 0, mad < 4 - \epsilon \Rightarrow \chi^2 \leq \Delta + \mathcal{O}(\frac{1}{\epsilon}).$

M maximal $\mid \forall m < M, \exists C,$
 $mad < m \Rightarrow \chi^2 \leq \Delta + C.$

Théorème

Pour tout $\epsilon > 0, mad < 4 - \epsilon \Rightarrow \chi^2 \leq \Delta + \mathcal{O}(\frac{1}{\epsilon}).$

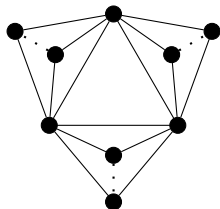


$$\begin{aligned}\Delta &= 2p. \\ mad &= 4 - \frac{2}{p}. \\ \chi^2 &= \frac{3\Delta}{2}.\end{aligned}$$

M maximal $\mid \forall m < M, \exists C,$
 $\text{mad} < m \Rightarrow \chi^2 \leq \Delta + C.$

Théorème

Pour tout $\epsilon > 0, \text{mad} < 4 - \epsilon \Rightarrow \chi^2 \leq \Delta + \mathcal{O}(\frac{1}{\epsilon}).$



$$\begin{aligned}\Delta &= 2p. \\ \text{mad} &= 4 - \frac{2}{p}. \\ \chi^2 &= \frac{3\Delta}{2}.\end{aligned}$$

Théorème optimal
 $M = 4$

Une méthode de déchargement “semi-globale”.

Une méthode de déchargement “semi-globale”.

- Considérons un contre-exemple minimal

Une méthode de déchargement “semi-globale”.

- Considérons un contre-exemple minimal
- Poids initial d'un sommet : son degré

Une méthode de déchargement “semi-globale”.

- Considérons un contre-exemple minimal
- Poids initial d'un sommet : son degré
- “Feeding areas” explicites (\simeq arbres)

Une méthode de déchargement “semi-globale”.

- Considérons un contre-exemple minimal
- Poids initial d'un sommet : son degré
- “Feeding areas” explicites (\simeq arbres)
- Règles de déchargement et configurations interdites

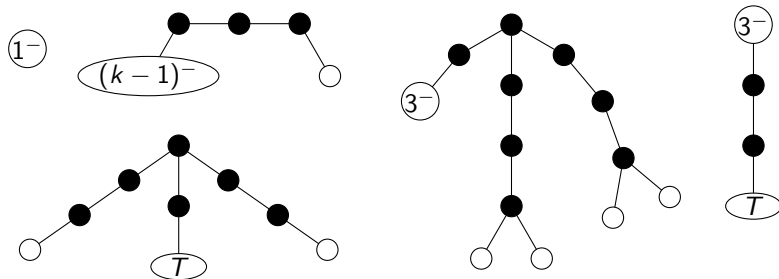
Une méthode de déchargement “semi-globale”.

- Considérons un contre-exemple minimal
- Poids initial d'un sommet : son degré
- “Feeding areas” explicites (\simeq arbres)
- Règles de déchargement et configurations interdites
- Poids final d'un sommet : $\geq \frac{7}{3}$

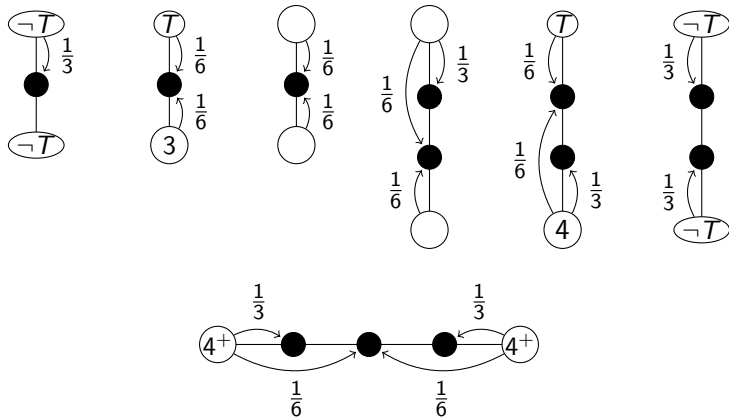
Une méthode de déchargement “semi-globale”.

- Considérons un contre-exemple minimal
- Poids initial d'un sommet : son degré
- “Feeding areas” explicites (\simeq arbres)
- Règles de déchargement et configurations interdites
- Poids final d'un sommet : $\geq \frac{7}{3}$
- Contradiction

Configurations interdites



Règles de déchargement



Conclusion

Merci pour votre attention.